リニアック中の運動のまとめ　（１）

加藤隆夫

LONGITUDINAL MOTION

$$dW/dz = eE\cos\phi = eE\cos(\phi + \phi_s) \qquad (1)$$

$$E = E_0 T$$

$$\phi = \phi - \phi_s$$
$$W_k = Ws - W$$

添字 s は安定粒子を表す。

$$\phi = \omega\left(t - \int_0^z dz/\,Vs\right) \qquad (2)$$

(1),(2) より

$$dW_k/dt = e\,E\,Vs\,(\cos\phi_s - \cos(\phi - \phi_s)) \qquad (3)$$

$$d\phi/dt = \omega\,W_k/(\gamma^2\,Ps\,Vs) \qquad (4)$$

$$P = m_0 c\beta\gamma,\quad V = c\beta,\quad \omega = 2\pi f$$
$$W = m_0 c^2(\gamma - 1),\quad \varepsilon = m_0 c^2$$

(3),(4) は、

$$H = \omega W_k^2/2\gamma^2\,Ps\,Vs + V(\phi) \qquad (5)$$

$$V(\phi) = e\,E\,Vs\,(\sin(\phi+\phi_s) - \phi\cos\phi_s) \qquad (5\text{-}1)$$

$$= -e\,E\,Vs\,(\phi^2/2 - 1)\sin\phi_s \qquad (5\text{-}2)$$

とすれば、

$$d\phi/dt = H/\,W_k,\quad dW_k/dt = -\,H/\,\phi$$

から得られる。　位相平面（ϕ, W_k）上の W_k の軌跡は、(5) より

$$W_k = \pm\gamma\sqrt{2\,Ps\,Vs/\omega}\,\sqrt{H - V(\phi)} \qquad (6)$$

separatrix は、$\phi = -2\phi_s$ の V, H から求められる。

$$G = (P - Ps)/Ps \qquad (7)$$

と定義すれば、separatrix の G は、

$$Gc = \pm\gamma\sqrt{2eE/\omega\,Ps}\,\sqrt{(\phi - \sin\phi + 2\phi_s)\cos\phi_s - (1 + \cos\phi)\sin\phi_s} \qquad (8)$$

$$\Omega = \omega\sqrt{Wr\,|\tan\phi_s|\,/\,(2\pi\beta\gamma^3)} \qquad (9)$$

(9)を用いて、(8) を書き直すと、

$$Gc = \pm\sqrt{2}\gamma^2(\Omega/\omega)\sqrt{1+\cos\phi-(\phi-\sin\phi+2\phi_s)\cot\phi_s} \qquad (10)$$

ここで Wr は 波長当りの加速エネルギーと rest mass との比であって、

$$Wr = eE_0 T\lambda\cos\phi_s/\varepsilon \qquad (11)$$

G の最大値は、$\phi = 0$ とおいて、

$$Gmax = 2\gamma^2(\Omega/\omega)\sqrt{1-\phi_s\cot\phi_s} \qquad (12)$$

Small longitudinal oscillation

$|\phi| \ll 1$ の時、(3), (4) より

$$dW_K/dt = -\omega\gamma^2 Ps\ Vs\ (\Omega/\omega)^2\phi \qquad (13)$$

$$d\phi/dt = \omega W_K/(\gamma^2 Ps\ Vs) \qquad (14)$$

上の2式より

$$d^2\phi/dt^2 + d/dt(\ln(\gamma^2 Ps\ Vs))d\phi/dt + \Omega^2\phi = 0 \qquad (15)$$

変数変換 $\tau = \omega t$ を行うと、

$$d^2\phi/d\tau^2 + 2\delta(\tau)d\phi/d\tau + (\nu(\tau))^2\phi = 0 \qquad (15)$$

$$\delta(\tau) = ((3\gamma^2-1)/2)(\Omega/\omega)^2|\cot\phi_s| \qquad (16\text{-}1)$$

$$\nu(\tau) = \Omega(\tau)/\omega \qquad (16\text{-}2)$$

(15) の解として次の形を考える。

$$\phi(\tau) = \Phi(\tau)\sin\Psi(\tau) \qquad (17)$$

(15)より

$$\Phi'' + 2\delta\Phi' + (\nu^2 - \Psi'')\Phi = 0 \qquad (18)$$

$$\Phi\Psi'' + 2(\Phi' + \delta\Phi)\Psi' = 0,\ (\ ' = d/d\tau) \qquad (19)$$

$\Phi' \sim 0$ と近似すると (18) より

$$d\Psi/dt = \Omega \qquad (20)$$

従って、phase advance $\Delta\Psi$ は

$$\Delta\Psi(t) = \int_{t0}^{t} \Omega(t)\, dt \qquad (21)$$

potential $V(\phi)$ が (5-2) の近似式で与えられる時、(6)において $H = V(\Phi)$ とおくと、次の ellipse が得られる。

$$\phi^2/\Phi^2 + W_k{}^2/X^2 = 1 \qquad (22)$$

$$X = \gamma^2 Ps\ Vs\ (\Omega/\omega)\Phi \qquad (23)$$

ellipse area $Ia = \pi\Phi X \sim const.$ (24)

従って

$$\Phi = const./\sqrt{\gamma^2 Ps\ Vs\ \Omega/\omega} \qquad (25)$$

$$X = const.\sqrt{\gamma^2 Ps\ Vs\ \Omega/\omega} \qquad (26)$$

$G = W_k/ PsVs$ だから (26)'

$$Ga = const.\sqrt{\gamma^2/(Ps\ Vs)\ \Omega/\omega} \qquad (27)$$

加速が一定の場合（ $Wr = const$ ）の諸量の変化の様子

$$\Omega/\omega \sim \gamma^{-1} Ps^{-1/2},\ \Phi \sim Ps^{-3/4},\ X \sim Ps^{3/4},\ Ga \sim \gamma Ps^{-5/4},$$

$$Gmax \sim \gamma Ps^{-1/2},\quad Z - Zs \sim \gamma^{-1} Ps^{1/4},\quad P - Ps \sim \gamma Ps^{-1/4} \qquad (28)$$

non relativistic

$$\Omega/\omega \sim Ws^{-1/4},\ \Phi \sim Ws^{-3/8},\ Ga \sim Ws^{-5/8},\ Z - Zs \sim Ws^{1/8},\ V - Vs \sim Ws^{-1/8} \qquad (29)$$

加速が変化する時の諸量の変化

加速の変化の定義 $dWs/dz = (dWs/dz)_0 (Ws/W_0)^m$ (30)
0 は 入射部を示す。

$$\Omega/\omega = (Ws/W_0)^m \sqrt{Wr^0\ |\tan\phi_s|/2\pi\beta\gamma^3} \qquad (31)$$

$$\Phi \sim Ws^{-(3+2m)/8} \qquad (32)$$

$$Ga \sim Ws^{-(5-2m)/8} \qquad (33)$$

これより $-3/2 < m < 5/2$ が望ましい。

Phase advance

(21),(9) より Wr が一定の時は、

$$\Delta\Psi = \sqrt{2\pi \mid \tan\phi_s \mid / Wr} \int_{\gamma_0}^{\gamma} (\gamma^2 - 1)^{-3/4} d\gamma \quad (34)$$

使いやすい形になおすと、

$$\Psi = \kappa \int_1^{\gamma} (\gamma^2 - 1)^{-3/4} d\gamma \quad (35)$$

$$\kappa = \sqrt{2\pi \mid \tan\phi_s \mid / Wr} \quad (36)$$

$$\Delta\Psi = \Psi(\gamma_2) - \Psi(\gamma_1) \quad (37)$$

(37) が, γ_1からγ_2に加速する時の phase advance を与える。

(35) において、$X^4 = \gamma^2 - 1$, $\tan(\theta/2) = (\gamma^2 - 1)^{1/4} = X$ の変換を行うと、

$$\Psi = \kappa F(\theta, 1/\sqrt{2}) \quad (38)$$

$$F(\theta, k) = \int_0^{\theta} d\theta / \sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta} \text{ , 第一種楕円積分} \quad (39)$$

$\theta \ll 1$ の時は、 $F \sim \theta$ となるので

$$\Delta\Psi = \kappa(\theta - \theta_0) \quad (40)$$

$$= 2^{5/4} \kappa \left[(Ws/\varepsilon)^{1/4} - (W_0/\varepsilon)^{1/4} \right] \quad (41)$$

$$= 2\kappa(\sqrt{\beta} - \sqrt{\beta_0}) \quad (42)$$

Non-ideal accelerating system の問題

加速に関係するパラメーターの関係

cell length $L = n\beta\lambda$, (n = 1 for DTL) (43)

加速によるセル長さの増分は

$\Delta L = n\lambda \cdot \Delta\beta$, $\Delta\beta = \Delta W / (\beta\gamma^3\varepsilon)$, $\Delta W = eE_0TL\cos\phi_s$ だから

$$\Delta L = (en^2/\gamma^3\varepsilon) E_0 T \lambda^2 \cos\phi_s = \text{const.} \quad (44)$$

non-relativistic $\gamma \sim 1$ の時は、

$$E_0 T \lambda^2 \cos\phi_s = C_0 = \text{const} \quad (45)$$

これより

$$\Delta\phi_s = \cot\phi_s\,(\,\Delta E_0/E_0 + \Delta T/T + 2\Delta\lambda/\lambda\,) \qquad (46)$$

(11)(45) より

$$Wr = eC_0 / (\,\varepsilon\lambda\,) \qquad (47)$$

上式は、安定粒子の加速ゲインは、周波数にのみ依存している事を示している。タンク長さを L とすれば、安定粒子の得るエネルギーは

$$Ws = eC_0L/(\varepsilon\lambda^2) \qquad (48)$$

Field error と phase advance の関係

(35)(36) より

$$\delta(\Delta\Psi)/\Delta\Psi = \delta\kappa/\kappa = 1/(2\sin^2\phi_s)\,\delta E_0/E_0 \qquad (49)$$

安定位相の変化が momentum spread に及ぼす影響

(23)より non relativistic の時は

$$Ga = (\Omega/\omega)\Phi \qquad (50)$$

ϕ_s の変化は Φ の変化と同等だから

$$\Delta Ga = (\Omega/\omega)\,|\Delta\phi_s| \qquad (51)$$

field が変化する時は (46) を用いて

$$\Delta Ga = \cot\phi_s(\Omega/\omega)\,\Delta E_0/E_0 \qquad (52)$$

Drift space の効果

タンク 1 の位相空間の ellipse　ϕ_1, W_{k1}
タンク 2 の位相空間の ellipse　ϕ_2, W_{k2}
(22)(26)'を用いると

$$\Phi_1^2 = \phi_1^2 + (\omega/\Omega_1)^2 G_1^2 \qquad (53)$$

$d\phi/dt = \omega G$ を用いると、drift space S を通過後の ϕ_2 は

$$\phi_2 = \phi_1 + \omega G_1 S/Vs \qquad (54)$$

更に $\phi_1 = \Phi_1\sin\Psi$, $G_1 = (\Omega_1/\omega)\Phi_1\cos\Psi$ として、ϕ_2 と$G_2=G_1$ の ellipse に代入して、$\Phi 2$ が最大となるような位相Ψを求めると

$$\Phi_2 = \Phi_1/\sqrt{2}\,[1 + (\Omega_1/\Omega_2)^2 + a^2 \pm \sqrt{((\Omega_1/\Omega_2)^2+a^2-1)^2+4a^2}]^{1/2} \quad (?)$$

(55)

$$G_2 = G_1(\Omega_2/\Omega_1)(\Phi_2/\Phi_1) \qquad (56)$$

$$a = 2\pi S/(\beta\lambda)(\Omega_1/\omega) \qquad (57)$$

$\Omega_1 = \Omega_2$ の場合には

$$\Phi_2/\Phi_1 = (1 + a^2/2 \pm a\sqrt{1 + a^2/4}\ )^{1/2} \qquad (58)$$

$$G_2/G_1 = \Phi_2/\Phi_1 \qquad (59)$$

$a << 1$ の場合には

$$\Phi_2/\Phi_1 \sim 1 \pm a/2 \qquad (60)$$

位置のズレδZの効果

セル中心でδZの位置のズレがあれば、位相のズレを生じる。

$$\delta\phi = \omega\,\delta Z/Vs = 2\pi\,\delta Z/\beta\lambda \qquad (61)$$

ギャップにおける加速は

$$\Delta P = eE_0 TL\cos\phi s \qquad (62)$$

故に $\delta(\Delta P) = \Delta P\,(\Delta E_0/E_0 - (\tan\phi_s)\Delta\phi_s)$ (63)

field error と位置エラーがある場合の 縦振動の振幅の増加は

$$\delta G = \delta(\Delta p)/Ps = (nWr/\beta\gamma)(\delta E_0/E_0 - \tan\phi_s\delta\phi) \qquad (64)$$

リニアック全体の効果は、(ϕ, G)平面上で考える。(22)(23)(26)より

$$Ga^2 = G^2 + (\Omega/\omega)^2\phi^2 \qquad (65)$$

$$G = Ga\sin\Psi \qquad (66)$$

$$\phi = \Phi\cos\Psi \qquad (67)$$

(65) より、 n -th cell の、ある粒子に対するperturbation を求めると、

$$\delta Ga_n = \sin\Psi_n\delta G_n + (\Omega/\omega)_n\cos\Psi_n\,\delta\phi \qquad (68)$$

(28) より n -th cell の影響は、加速に従って damp する事がわかる。
n-th cell が k-th cell に及ぼす影響は

$$\delta Ga_n{}^K = \delta Ga_n \ (\beta_n/\beta_K)^{5/4} \tag{69}$$

全てのセルの和は

$$\Delta Ga = \sum_{n=0}^{N} \delta Ga_n \ (\beta_n/\beta_K)^{5/4} \tag{70}$$

二乗平均を $\langle X \rangle = (\overline{X^2})^{1/2}$ (71)

と定義して、粒子の位相空間の占有確率を一定と仮定して、粒子平均をすれば

$$\langle \delta Ga \rangle^2 = (1/2) \sum_{n=0}^{N} \{\langle \delta G_n \rangle^2 + (\Omega/\omega)_n{}^2 \langle \delta \phi \rangle^2\} \ (\beta_n/\beta_K)^{5/2} \tag{72}$$

(64) より

$$\langle \delta G_n \rangle = \langle \delta G_K \rangle (\beta_n/\beta_K)^{-1} \tag{73}$$

(9) より

$$(\Omega/\omega)_n = (\Omega/\omega)_K (\beta_n/\beta_K)^{-1/2} \tag{74}$$

(72) - (74) より、和を積分になおして実行すれば

$$\langle \Delta Ga \rangle = \sqrt{(N/2) \ [\langle \delta G \rangle^2 + (\Omega/\omega)_N{}^2 \langle \delta \phi \rangle^2]} \tag{75}$$

$$\langle \delta \phi \rangle = 2\pi \langle \delta z/\beta \lambda \rangle \tag{76}$$

$$\langle \delta G \rangle = (nWr/\beta_N) \sqrt{\langle \delta E_0/E_0 \rangle^2 + 4\pi^2 \tan^2 \phi_s \langle \delta Z/\beta \lambda \rangle^2} \tag{77}$$

この小ノートは、ref. 1 の第一章からまとめたものである。詳しく知りたい方は参照されたい。

Ref. 1 I. M. Kapchinskiy, "Theory of Resonance Linear Accelerators".

ex. 1 separatrix , acceptance

$$Gmax = 2\gamma^2 (\Omega/\omega) \sqrt{1 - \phi_s \cot\phi_s} \qquad (12)$$

$$\Omega = \omega \sqrt{Wr \, | \tan\phi_s | / (2\pi \beta \gamma^3)} \qquad (9)$$

$$Wr = eE_0 T\lambda \cos\phi_s / \varepsilon \qquad (11)$$

f	201 MHz	201	432	1296
E_0	1.5 MV/m	2.1	3	4
T	0.64	0.88	0.79	0.825
W_0	0.75 MeV	20.5	3	150
β	0.040	0.205	0.080	0.51
ϕ_s	-26	-30	-30	-30

Wr	1.4E-3	2.5E-3	1.5E-3	7.0E-4
Ω/ω	0.052	0.033	0.042	0.0090
Gmax	0.027	0.020	0.026	0.0074
ΔW	0.06	0.79	0.16	2.1 MeV

$$\Delta W = \varepsilon \beta^2 \gamma \, Gmax$$

ex. 2 Phase advance

$$\Delta\Psi = 2^{5/4} \kappa \, [(Ws/\varepsilon)^{1/4} - (W_0/\varepsilon)^{1/4}] \qquad (41)$$

$$\kappa = \sqrt{2\pi \, | \tan\phi_s | / Wr} \qquad (36)$$

$$\delta(\Delta\Psi)/\Delta\Psi = \delta\kappa/\kappa = 1 / (2 \sin^2\phi_s) \delta E_0/E_0 \qquad (49)$$

1) 432 MHz, 3 --> 150 MeV, Wr = 1.5E-3 , κ = 38.1,
$\Delta\Psi$ = 35.8 rad, 5.7 oscillation

$\delta(\Delta\Psi)$ = 15 degree とすると、許される field error は
$\delta E_0/E_0$ = 0.0037

2) 1296 MHz, 150 --> 1000 MeV, Wr = 7.0E-4, κ = 72.0
$\Delta\Psi$ = 65.7 rad, 10.5 oscillation

$\delta(\Delta\Psi)$ = 15 degree とすると、許される field error は
$\delta \cdot E_0/E_0$ = 0.0020

ex. 3 Drift space

$$a = 2\pi S/(\beta\lambda)(\Omega_1/\omega) \tag{57}$$

$$\Phi_2/\Phi_1 = \left(1 + a^2/2 \pm a\sqrt{1 + a^2/4}\right)^{1/2} \tag{58}$$

a << 1 の場合には

$$\Phi_2/\Phi_1 \sim 1 \pm a/2 \tag{60}$$

1) 20 MeV, 201MHz, $\Omega/\omega = 0.033$, $S = 8.1\beta\lambda$
$a = 1.68$
$\Phi_2/\Phi_1 = 2.15$, surprizing !

2) 10 MeV, 432 MHz, $\Omega/\omega = 0.042$, $S = 2\beta\lambda$, $a = 0.336$

$\Phi_2/\Phi_1 = 1.17$

3) 150 MeV, 1296 MHz, $\Omega/\omega = 0.009$, $S = 5.5$ < **** if applicable
$a = 0.31$
$\Phi_2/\Phi_1 = 1.16$

ex.4 tolerance of field error and phase error

$$\langle \Delta Ga\rangle = \sqrt{(N/2)\left[\langle\delta G\rangle^2 + (\Omega/\omega)_N{}^2\langle\delta\phi\rangle^2\right]} \tag{75}$$

$$\langle\delta\phi\rangle = 2\pi\langle\delta z/\beta\lambda\rangle \tag{76}$$

$$\langle\delta G\rangle = (nWr/\beta_N)\sqrt{\langle\delta E_0/E_0\rangle^2 + 4\pi^2\tan^2\phi_s\langle\delta Z/\beta\lambda\rangle^2} \tag{77}$$

1) 432 MHz, $Wr = 1.5E-3$, $\Omega/\omega = 0.013$, 3 ---> 150 MeV
$\beta_N = 0.51$、$n = 1$, $N = 344$

$\langle\Delta Ga\rangle^2 = 0.0015\ \langle\delta E_0/E_0\rangle^2 + 1.2\ \langle\delta Z/\beta\lambda\rangle^2$

入射部にて separatrix いっぱいの広がりを仮定すれば、 ex.1 より $Ga_0 = 0.026$. Ga の damping は (29) に従うと仮定すれば、出口における Ga = 0.0023 となる。Ga の 25% の増加を許容限界とすれば $\Delta Ga = 0.000575$。均等に torelance を配分すると

$\langle\delta E_0/E_0\rangle = 0.01$, $\langle\delta Z/\beta\lambda\rangle = 3.7\ E-4$

2)1296 MHz, $Wr = 7.0E-4$, $\Omega/\omega = 0.0029$, 150 --> 1000 MeV
$\beta_N = 0.88$、$n = 1/2$, $N = 3500$

$\langle\Delta Ga\rangle^2 = 0.00028\langle\delta E_0/E_0\rangle^2 + 0.58\langle\delta Z/\beta\lambda\rangle^2$

入射部にて separatrix いっぱいの広がりを仮定すれば、 ex.1 より Ga_0 = 0.0074. Ga の damping は (28) に従うと仮定すれば、出口における Ga = 0.0032 となる。Ga の 25% の増加を許容限界とすれば ΔGa = 0.0008。均等に torelance を配分すると

$$\langle \delta E_0/E_0 \rangle = 0.034, \quad \langle \delta Z/\beta\lambda \rangle = 7.5\ E\text{-}4$$

以上の例にて使用したパラメーターや、適用の仕方には検討を加えていないので、今後の議論に期待する。