

ビードによる空洞内の電磁場の測定

空洞の境界面を僅かに移動した時の共振周波数の変化は次式で与えられる。

$$\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2} = \int (H_a^2 - E_a^2) dV \quad (1)$$

ω は摂動後の周波数、 ω_0 は摂動前の周波数、 H_a と E_a は摂動前の電磁場であり、 H_a^2 と E_a^2 の空洞体積内の積分は 1 に規格化している。(1) の積分は変化した体積内で行なう。上式が空洞内の微小な摂動体にも適用出来ると考える。その場合には、局所的な電磁場の大きさと摂動体の形状とにより摂動の大きさが変わってくる。例えば、円盤の平面を電場に垂直に置けば、電気力線が面に垂直になって、殆どもとの電場を乱さないと考えられる。しかし、平面を電場に平行に置けば、大きな摂動を与えるであろう。同じ体積でも置き方によって摂動の量が変わるわけである。但し、電磁場の相対的な変化を調べる場合には普通は（よほど間違った測定をしない限り）、測定結果は形状に依存しなくなる事は、実用上大切である。

摂動体が簡単な回転体の場合を考えてみる。

仮定：回転体の寸法は波長に比べて無視できる程度に小さいと考える。その場合には、充分な精度で電場を静電場で近似可能であり、それは解析的に解ける。

z 方向の一様な電場 E_0 の中に、半径 a の導体球がある時の静電ポテンシャルは、第 II 章の例題 4 に与えられており、

$$\phi = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta \quad (2)$$

電場の各成分は微分すればもとまり、

$$E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = E_0 \left(1 + \frac{2a^3}{r^3} \right) \cos \theta \quad (3)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = E_0 \left(-1 + \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \theta \quad (4)$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = 0 \quad (5)$$

$H_a=0$ としているので(1)は

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = \int_{\Delta V} E_a^2 dV \quad (6)$$

$$\text{ここで } E_a^2 = E_r^2 + E_\theta^2 + E_\varphi^2 \quad (7)$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (8)$$

(6) の積分は、半径 a から $a + da$ までの無限小の変化をまず考えて、それから $a=0$ から a までの積分を行なう。従って(6)の右辺は

$$\int_a^{a+da} \left(1 + \frac{2a^3}{r^3}\right)^2 r^2 dr \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta + \int_a^{a+da} \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)^2 r^2 dr \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \quad (9)$$

この積分を行なう為に次の関係を使う。

$$\int_{x_0}^{x_0+dx_0} f(x) dx = f(x_0) dx_0 \quad (9)$$

$$\int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{2}{3} \quad (10)$$

故に
$$\int_V^{V+dV} E_a^2 dV = 12\pi E_0^2 a_0^2 da_0 \quad (11)$$

(11)を $a_0=0$ から a まで積分すれば求める関係が得られる。

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = 3E_0^2 \frac{4\pi}{3} a^3 \quad (12)$$

同様にして磁場だけが存在する場合には

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = -\frac{3}{2} H_0^2 \frac{4\pi}{3} a^3 \quad (13)$$

が得られ、(12)(13)をまとめると

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = \frac{4\pi}{3} a^3 3 \left(E_0^2 - \frac{1}{2} H_0^2 \right) \quad (14)$$

摂動体が針の場合、円盤の場合などは L. C. Maier and J. C. Slater, J. Appl. Phys., 23(1952)68. に詳しいので参照してもよいし、ここでは Ginzton "Microwave Measurements" p.449 以降から引用する。

針状の回転楕円体、 $\beta = r_1/r_2$ 、 r_1 は短軸、 r_2 は長軸、長さを $2a$ とする。

針が電場と平行の時

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = \frac{E_0^2 (1 - \beta^2)^{3/2} V}{\frac{1}{2} \text{Ln} \frac{1 + (1 - \beta^2)^{1/2}}{1 - (1 - \beta^2)^{1/2}} - (1 - \beta^2)^{1/2}} \quad (15)$$

$$\text{ここで } V = \frac{4\pi a^3}{3}.$$

針が電場と垂直の時

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = \frac{2E_0^2(1-\beta^2)^{3/2}V}{\frac{(1-\beta^2)^{1/2}}{\beta^2} - \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+(1-\beta^2)^{1/2}}{1-(1-\beta^2)^{1/2}}} \quad (16)$$

針が磁場と平行の時

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = -\frac{H_0^2(1-\beta^2)^{3/2}V}{\frac{(1-\beta^2)^{1/2}}{\beta^2} - \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+(1-\beta^2)^{1/2}}{1-(1-\beta^2)^{1/2}}} \quad (17)$$

針が磁場と垂直の時

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = -\frac{2H_0^2(1-\beta^2)^{3/2}V}{\frac{(1-2\beta^2)}{\beta^2}(1-\beta^2)^{1/2} + \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+(1-\beta^2)^{1/2}}{1-(1-\beta^2)^{1/2}}} \quad (18)$$

次に 2 a が円盤の直径に相当する場合を考える。

円盤が電場と平行の時

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = \frac{2E_0^2(1-\beta^2)^{3/2}V}{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{\beta}{(1-\beta^2)^{1/2}} - \beta(1-\beta^2)^{1/2}} \quad (19)$$

円盤が電場と垂直の時

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = \frac{E_0^2(1-\beta^2)^{3/2}V}{\frac{(1-\beta^2)^{1/2}}{\beta} + \tan^{-1} \frac{\beta}{(1-\beta^2)^{1/2}} - \frac{\pi}{2}} \quad (20)$$

円盤が磁場と平行の時

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = -\frac{H_0^2(1-\beta^2)^{3/2}V}{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{\beta}{(1-\beta^2)^{1/2}} - \beta(1-\beta^2)^{1/2}} \quad (21)$$

円盤が磁場と垂直の時

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = - \frac{2H_0^2(1-\beta^2)^{3/2}V}{\tan^{-1} \frac{\beta}{(1-\beta^2)^{1/2}} + \frac{2-\beta^2}{\beta}(1-\beta^2)^{1/2} - \frac{\pi}{2}} \quad (22)$$

特に針の場合には、感度の方向依存性を利用して、電場の方向等が測定出来る可能性がある事が Ginzton に論じられているので、そのような精密測定をする場合には参照の事。

(1)は空洞内で規格化されており、物質の定数が入っていない等の問題点があるので、実用上では、次式に書き直しておいたほうが都合が良い。

$$\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2} = k \frac{\int_{\Delta\tau} (\mu H^2 - \epsilon E^2) d\tau}{\int (\mu H^2 + \epsilon E^2) dV} \quad (23)$$

分子の積分は摂動体で行ない、分母の積分は空洞全体で行なう。kは摂動体の形状に依存する係数である。(1)の分母は1に規格化されていた。分母は空洞の蓄積エネルギーUの2倍であるから

$$\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2} = k \frac{\int_{\Delta\tau} (\mu H^2 - \epsilon E^2) d\tau}{2U} \quad (24)$$

摂動が小さい時には

$$\delta = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = k \frac{\int_{\Delta\tau} (\mu H^2 - \epsilon E^2) d\tau}{4U} \quad (25)$$

シャントインピーダンスの測定

$$\text{無負荷}Q\text{は } Q_0 = \omega \frac{\text{energy stored}}{\text{energy lost per second}} = \frac{\omega U}{P} \quad (26)$$

シャントインピーダンスの定義は

$$R_0 = \frac{(\text{effective voltage})^2}{\text{power loss}} = \frac{(\int Edz)^2}{P} \quad (27)$$

ここで注意すべきは、分母が2Pとなっている場合がある事であり、これは定義の違いと考えてよい。ドリフトチューブリニアックは、距離Lを進む時の加速エネルギーを $E_0 TL \cos\phi$ で表しており、この E_0 が(27)の積分に相当して、平均加速電場と呼ぶ。そして、高周波電場を $E_0 \cos\omega t$ と表す。従って、

$$(\int Edz)^2 = E_0^2 L^2 \quad (28)$$

(27)(28)より、よく使われる単位長さ当たりのシャントインピーダンスZを求めると

$$Z(\Omega / m) = \frac{R_0}{L} = \frac{E_0^2 L}{P} = \frac{E_0^2}{P/L} \quad (29)$$

となって、加速電場と単位長さ当たりの高周波損失との比になる。(26)(27)より

$$\frac{R_0}{Q_0} = \frac{(\int Edz)^2}{\omega U} \quad (30)$$

式の形からわかるように、 R/Q は空洞の損失によらないという特徴があり、これは空洞の重要な性能指標の一つとなる量である。

電場が一定の場合には

$$(\int Edz)^2 = E^2 L^2 \quad (31)$$

このEは数値的には平均電場と同じであるが意味は違っている。従って、(30)は

$$\frac{R_0}{Q_0} = \frac{L^2 E^2}{\omega U} \quad (32)$$

加速管は普通 TM01 モードで働く為に、軸上の磁場はゼロであり、電場だけが存在するとみなす事ができる。摂動が小さく、且つEが一定の時には、 $\Delta\tau$ を摂動体の体積とすれば、(25)は

$$\delta = -\frac{k\epsilon E^2 \Delta\tau}{4U} \quad (33)$$

故に、(32)の E^2/U は測定により得られる事がわかる。(32)(33)より

$$\frac{R_0}{Q_0} = -\frac{4L^2 \Delta f}{k\omega\epsilon f \Delta\tau} = \frac{240}{k} L^2 \frac{\Delta\lambda}{\Delta\tau} = \frac{72 \times 10^9}{k} \frac{L^2 \Delta f}{f^2 \Delta\tau} \quad (34)$$

形状因子kの求め方

- 1) 導体球などの簡単な場合は計算でもとまる。(14)式参照。
 - 2) 理論計算で R/Q が算出出来るものと比較する。例えば TM010 モード。
 - 3) 形状因子が1と見做せるような実験をする。
- (3) について紹介しよう。

電場が軸に沿って一定と見做せるときの R/Q の測定

周波数チューニングバーを、空洞の壁から出し入れして周波数変化を測定する。バーが壁面と一致する時には、空洞内の電磁場は乱されていないはずである。従って、この時は $k=1$ である。摂動体の体積に対して周波数変化をプロットして、体積ゼロの所の傾きを求めればよい。これは、摂動体積を無限小に外挿する事になる。図に具体例を示す (Ginzton p.442)。

電場が軸に沿って変化する時の R/Q の測定

この場合が一般的である。軸方向の空洞の中心位置の平面上では、普通電場が最大 (E_m) であり、且つ対称になっている。一般には、中心位置でなくとも、電場が対称となる位置でよい。この面に前項のチューニングバーを設置して絶対測定を行なうと、

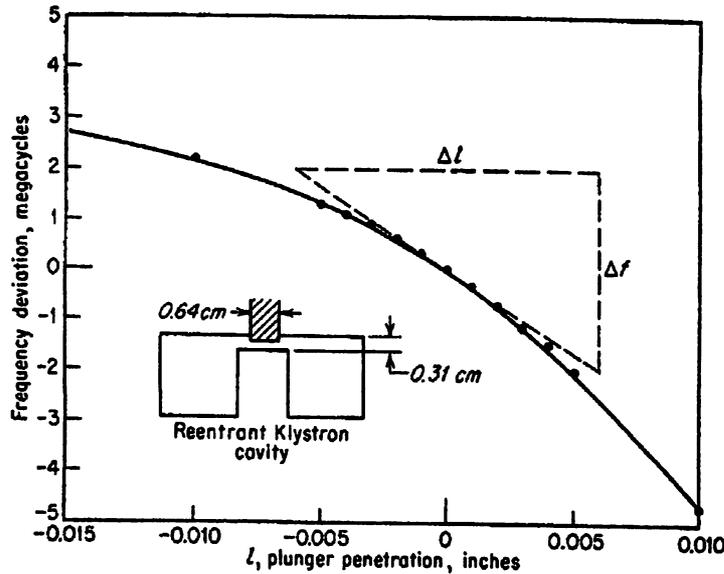


Fig. 10.4. Typical experimental perturbation data obtained with a klystron resonator at 2,800 Mc.

$$\delta = -\frac{\epsilon E_m^2 \Delta\tau}{4U} \quad (35)$$

が測定される。次に軸に沿って電場分布の相対測定を、微小なビードを用いて行なう。この相対測定からわかるのは、 E_m と平均電場 E_0 との比である。

$$\alpha = \frac{E_m}{E_0} \quad (36)$$

(30)の積分は $E_0 L$ になる事に注意して書き直すと、

$$\frac{R_0}{Q_0} = \frac{E_0^2 L^2}{\omega U} = \frac{E_m^2 L^2}{\alpha^2 \omega U} = -\frac{2}{\pi \alpha^2 \epsilon} \frac{L^2}{f^2} \frac{\Delta f}{\Delta\tau} \quad (37)$$

なお、ビードの体積、誘電率等が正確に測定できれば、ビードを動かす事により絶対測定が出来る事は明らかであるが、ビードは小さいので精度には注意を要する。

進行波の場合の注意

加速に進行波を用いる時は（電子リニアックでは一般的である）、測定は普通定在波で行なわざるを得ないので、新たに注意が必要である。第一に必要なシャントインピーダンスの定義が違って来る事に注意する必要がある。電子は位相速度が電子の速度と等しい電場成分（空間高調波の基本波 E_f ）のほぼピーク値と共に加速されるので

$$\frac{R_0}{Q_0} = \frac{\left(\int E_f dz\right)^2}{\omega U} = \frac{E_f^2 L^2}{\omega U} \quad (38)$$

と定義するのが簡明であろう。第二に注意すべきは、絶対測定を (35) の方式で行なう時に、(35) の測定で得られる E_m と E_f の関係を明らかにする事である。2/3 π モード加速の場合などには、この関係を見いだすためのビード測定をしなければいけない。第三に注意すべきは、測定の際の stored energy U は、進行波だけの場合の2倍になっている事である。

周波数測定 of 注意

空洞内部を誘電率と透磁率の異なる物質で満たすと、波長の変化が起こり、共振周波数の変化となる。
(27.2)より媒質の定数を ϵ_r, μ_r とすれば、電磁場の速度は

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}}$$

従って
$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}}$$

λ_0 は真空中の速度である。空洞共振器では、空洞のサイズと波長は正比例の関係なので、

$$\frac{f(\epsilon_r)}{f(\epsilon_0)} = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}}$$

従って、真空中に比べ、大気中では空気の誘電率が僅かに大きくなるので、共振周波数は低下する。この周波数変化は、空洞の一般論の例2で求めた誘電損失による共振周波数の変化とは区別されるものである。

空気の誘電率は (Montgomery p.391)

$$\epsilon_r = 1 + 210 \times 10^{-6} \frac{P_{\text{air}}}{T} + 180 \times 10^{-6} \left(1 + \frac{5580}{T} \right) \frac{P_w}{T}$$

P_{air} : 空気の圧力 (分圧) [mmHg, Torr]

P_w : 水蒸気分圧 [mmHg, Torr]

T : 絶対温度

湿度 H と水の飽和水蒸気圧 E_w との関係は

$$H(\%) = 100 \times \frac{P_w}{E_w}$$

温度 25°C では $E_w = 3168.3 \text{ Pa}$ (パスカル) = 23.76 Torr だから、湿度 50% とすれば $P_w = 11.88 \text{ Torr}$ となる。(理科年表の物理/化学の章: 水の蒸気圧、1 Torr = 133.32 Pa) 従って、温度 25°C (298K) 1 気圧 (760 Torr) の空気では

$$\epsilon_r = 1.000536 \quad (\text{湿度 } 0\%)$$

$$\epsilon_r = 1.0005356 + 0.0001415 = 1.000677 \quad (\text{湿度 } 50\%)$$

となる。これから、周波数変化として

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta \epsilon_r}{\epsilon_r}$$

と近似出来る事を考慮すれば、夫々 0.027% と 0.038% の周波数変化を与える事がわかる。

$$\int_{\Delta V} \mathbf{E}_a^2 dV = \frac{\int_{\Delta V} \mathbf{E}_a^2 dV}{\int_V \mathbf{E}_a^2 dV} = \frac{\int_{\Delta V} \epsilon |\mathbf{E}|^2 dV}{\int_V \epsilon |\mathbf{E}|^2 dV} = \frac{\int_{\Delta V} \epsilon |\mathbf{E}|^2 dV}{2U} \quad (13)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V \epsilon |\mathbf{E}|^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \epsilon |\mathbf{H}|^2 dV \quad (14)$$

U は空洞の stored energy である。(11) を書き直すと、

$$\omega^2 = \omega_a^2 \left(1 + \frac{\int_{\Delta V} (\mu |\mathbf{H}|^2 - \epsilon |\mathbf{E}|^2) dV}{2U} \right) \quad (15)$$

1 開口空洞共振器のチューニング

外界と1個のポートでつながっている空洞を考え、以下の仮定をする。

- 1) 空洞とつながる外部導波管は可動短絡板で終端される。
- 2) 無損失
- 3) 導波管は1個のモードだけが伝送可能として、その特性インピーダンスを Z_0 とする。
- 4) 導波管の途中に、軸に垂直な S' 面を考え、そこから短絡板までの距離を d とする。

S' から短絡板をみたインピーダンスは

$$Z_p = jZ_0 \tan \frac{2\pi d}{\lambda_g} \quad (1)$$

共振条件は

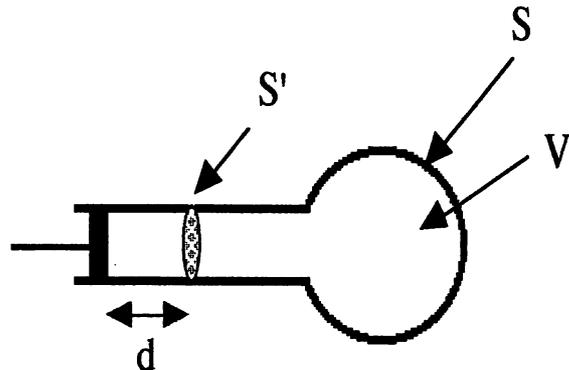
$$Z_p = -Z_{in} \quad (2)$$

(1)(***) より

$$\tan \frac{2\pi d}{\lambda_g} = \sum_a \frac{1}{Q_{ea} \left(\frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right)} \quad (3)$$

又は

$$d = \frac{\lambda_g}{2\pi} \tan^{-1} \sum_a \frac{1}{Q_{ea} \left(\frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right)} + \frac{1}{2} n \lambda_g \quad (n \text{ は整数}) \quad (4)$$



上式は、距離 d の関数としての ω (λ_g) を決める関係式である。 d と λ_g の関係を図*に示す。この図は

空洞の同調曲線 (tuning curve) と呼ばれる。以下の性質がわかる。

1) 短絡板を移動すれば、共振周波数は連続的に且つ周期的に変化し、その周期は $\lambda_g/2$ である。

2) $\omega \neq \omega_a$ では、 Σ の各項は小さくなるので、 $d \sim n\lambda_g/2$ となり、これは原点からの点線で表されている。

3) 周波数が共振点を通り過ぎれば、 \tan^{-1} の引数は $-\infty$ から $+\infty$ まで変化するので、 \tan^{-1} は $-\pi/2$ から $\pi/2$ まで π だけ減少する。従って、 d は $\lambda_g/2$ だけ減少するから、 n が1だけ小さい曲線へと移動する。

4) 共振時、 ω が空洞の固有周波数

$$\omega_a \text{ に一致すれば、 } d = \left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda_g}{2} \text{ となる。}$$

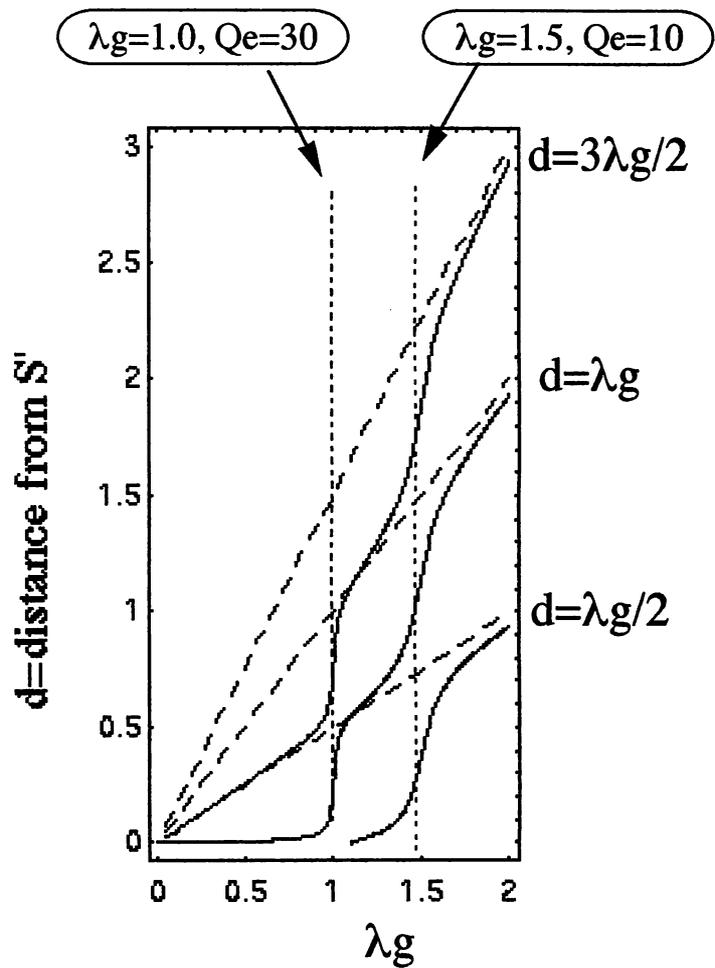
5) 共振の外部 Q_e が小さい時、即ち $\beta = Q_0/Q_e$ だから β が大きい時 (密な結合) には、同調曲線は、 $n\lambda_g/2$ と ω_n との交点から大きくずれる。大きな外部 Q_e の時 (β が小、疎な結合) は、2つの同調曲線は、共振時に近づく事がわかる。この時は、短絡板の位置を変えても共振周波数は殆ど変化しない。

6) この図の中には2種類の共振がある事がわかる。一つは空洞自体の共振であり、その共振周波数は ω_a で与えられる。 d の位置を変えても周波数の変化は少なく、同調曲線の垂直な勾配を持つ部分に相当する。他方は導波管の共振であり、点線 $n\lambda_g/2$ で表される。その共振周波数は、可動短絡板の位置により決まる。これらの二つの共振周波数が一致すれば、系全体が共振状態となる。

7) 可動短絡板をチューナーと考えると、第**章(*) より、周波数変化が激しい所は、場が強い事がわかる。従って、同調曲線の上で、前項で述べたような周波数変化が少ない部分はその (短絡板の位置の) 場が弱い事を示している。これは、逆の場合には、導波管中の場が強い事を示している。

次に同調曲線の $\omega = \omega_a$ の傾きから外部 Q 値がもとまる事を示そう。(4) を λ_g で微分して $\omega = \omega_a$ とおくと

$$\frac{d}{d\lambda_g}(d) = \frac{n + \frac{1}{2}}{2} - \frac{Q_{ea}}{\pi} \frac{d \log \omega}{d \log \lambda_g}$$



$$= \frac{n + \frac{1}{2}}{2} + \frac{Q_{ea} v_g}{\pi v_p}$$

これより、 Q_{ea} が大きければ、同調曲線の傾きが急である事がわかる。

空洞の a 番目の固有モードの正規化入力インピーダンスは (*) より

$$\frac{Z_{in}}{Z_0} = \frac{\frac{1}{Q_{ea}}}{j\left(\frac{\omega}{\omega'_a} - \frac{\omega'_a}{\omega}\right) + \frac{1}{Q_0}} + \frac{Z_{a1}}{Z_0}$$

で与えられる。

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0 \quad (38)$$

これは、定数係数の2階線形常微分方程式であるから、解を求める最も一般的な方法として、 $I = I_0 e^{j\omega t}$ の形を仮定して代入すれば、

$$j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) + \frac{1}{Q_0} = 0 \quad (39)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{LC} \quad (40)$$

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} \quad (41)$$

(39)の形は(12)で与えられる入力インピーダンスと同型だから、(12)を解いた(23)-(29)はそのままあてはまる。元来、(1)により表されるインピーダンスを求める時は、本節の議論を基礎にしているので、結果が一致して当然である。

直列共振回路と並列共振回路では、Q値の表現は異なっているが((11)と(32))、インピーダンス(アドミッタンス)を与える式の中では同じ形をしている((12)と(30))。従って、その基本的な形(39)式の表現で回路のQ値を定義すると考えると、今後出てくる表現との整合性が良い。

4) 透過型空洞の等価回路

2個のRFポートがある透過型空洞を考え、その直列等価回路を図*に示す。空洞は外部回路とトランス結合されていると考え、その比を $1:n_1$ 、と $1:n_2$ とする。電源側と負荷側のインピーダンスは、線路と整合しているものとして、純抵抗(Z_0)であると仮定する。書き換えた等価回路を図*に示す。回路の全インピーダンスは

$$\begin{aligned} Z &= R + n_1^2 R_g + n_2^2 R_L + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \\ &= R \left(1 + \beta_1 + \beta_2 + jQ_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right) \end{aligned} \quad (42)$$

ここで $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ 、 $Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R}$ 、 $\beta_1 = \frac{n_1^2 R_g}{R} = \frac{n_1^2 Z_0}{R}$ 、 $\beta_2 = \frac{n_2^2 R_L}{R} = \frac{n_2^2 Z_0}{R}$ 。

$1/Q$ は、損失に比例する事が(41)よりわかる。そこで(42)の全損失を $1/Q_L$ と書くと、

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_0} (1 + \beta_1 + \beta_2) = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{e1}} + \frac{1}{Q_{e2}}$$

$$= \frac{R}{\omega L} + \frac{n_1^2 R_g}{\omega L} + \frac{n_2^2 R_g}{\omega L} \quad (43)$$

従って、 $Q_0 = Q_L (1 + \beta_1 + \beta_2)$ (44)

$$\beta_1 = \frac{Q_0}{Q_{e1}}, \quad \beta_2 = \frac{Q_0}{Q_{e2}} \quad (45)$$

$$Q_{e1} = \frac{\omega L}{n_1^2 R_g}, \quad Q_{e2} = \frac{\omega L}{n_2^2 R_L} \quad (46)$$

の関係が得られる。回路に流れる電流は

$$I = \frac{n_1 V}{Z} \quad (47)$$

負荷抵抗に消費される電力（透過電力）は

$$P_T = n_2^2 Z_0 |I|^2 = \beta_2 R |I|^2 = \frac{\frac{\beta_1 \beta_2 V^2}{Z_0}}{(1 + \beta_1 + \beta_2)^2 + Q_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} \quad (48)$$

電源が供給出来る最大電力は $P_{\max} = \frac{1}{4} \frac{V^2}{Z_0}$ (49)

だから、透過率は $T(\omega) = \frac{P_T}{P_{\max}} = \frac{4\beta_1\beta_2}{(1 + \beta_1 + \beta_2)^2 + Q_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}$ (50)

共振周波数では $T(\omega_0) = \frac{4\beta_1\beta_2}{(1 + \beta_1 + \beta_2)^2}$ (51)

上の2式をまとめると $T(\omega) = \frac{T(\omega_0)}{1 + Q_L^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}$ (52)

共振周波数の近傍では

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \approx \frac{2\delta\omega}{\omega_0}$$

$$T(\omega) = \frac{4\beta_1\beta_2}{(1 + \beta_1 + \beta_2)^2 + Q_0^2 \left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{T(\omega_0)}{1 + Q_L^2 \left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (53)$$

空洞の外部回路にリアクタンス成分が存在すれば、

$$Z = R + n_1^2(R_g + jX_g) + n_2^2(R_L + jX_L) + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \quad (54)$$

従って、回路の共振周波数は、リアクタンス成分をゼロとして

$$1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \frac{n_1^2 X_g}{\omega L} + \frac{n_2^2 X_L}{\omega L} = 0 \quad (55)$$

からもとまる。 $n_1^2 X_g \ll \omega L$ 、 $n_2^2 X_L \ll \omega L$ が成り立つ場合には

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 \left(1 - \frac{n_1^2 X_g}{2\omega_0 L} - \frac{n_2^2 X_L}{2\omega_0 L} \right) \\ &= \omega_0 \left(1 - \frac{\beta_1 X_g}{2Z_0 Q_0} - \frac{\beta_2 X_L}{2Z_0 Q_0} \right) \end{aligned} \quad (56)$$

となり、共振周波数は低下する。 $X_g = X_L = Z_0$ 、 $\beta_1 = \beta_2 = 0.5$ 、 $Q_0 = 40000$ とすれば、 $\Delta\omega/\omega_0 = 1.25 \times 10^{-5}$ となる。

Q値の様々な側面

Q値は、空洞の目的により、様々な意味合いが強調出来る。

- 1) (11)(22)より空洞の高周波損失の指標となる。高周波損失は空洞内面の材質と表面状態に依存するので、表面状態の目安にもなる。加速空洞、特に超伝導空洞では基本的な性能指標である。
- 2) (11)の $\delta\omega$ に着目すれば、共振の周波数の幅の指標となる。鋭い共振カーブを周波数の安定化などに利用する場合には、達成出来る安定度の目安となる。沢山のモードがある場合には、夫々のモードの重なり具合の指標となる。
- 3) (*)より、空洞内の電磁場の過渡現象の時定数を決めている。パルス動作の空洞では重要である。
- 4) (*)より、空洞が外部回路と接続される時に、その結合の強さに関する。 Q_0 が変われば、外部回路に変化がなくても、カップリングが変わる。

3