

72
3e-

III 大強度陽子リニアック

高エネルギー物理学研究所

加藤 隆夫

目次

| | | |
|---------|-----------------------------------|----------|
| 第1章 | はじめに | III - 1 |
| 第2章 | 加速以前の諸問題 | III - 2 |
| § 2-1 | イオン源 | III - 2 |
| § 2-2 | Emittance - 1 | III - 3 |
| § 2-3 | Envelope equation の導出 - 1 | III - 5 |
| § 2-4 | 問題の背景 | III - 7 |
| § 2-5 | 軸対称円筒ビームの空間電荷効果 | III - 9 |
| § 2-6 | 軸対称バンチビームの空間電荷効果 | III - 10 |
| 第3章 | 空間電荷効果を含む基本式 | III - 11 |
| § 3-1 | 縦の運動 | III - 11 |
| § 3-2 | 横の運動 | III - 12 |
| § 3-3 | Emittance - 2 | III - 13 |
| § 3-4 | Envelope equation の導出 - 2 | III - 15 |
| § 3-5 | Envelope equation | III - 17 |
| § 3-6 | 粒子分布 | III - 18 |
| § 3-7 | 基本的な式のまとめ | III - 23 |
| 第4章 | Emittance equation | III - 25 |
| § 4-1 | 運動方程式 | III - 25 |
| § 4-2 | Emittance equation の導出 | III - 26 |
| § 4-3 | Emittance equation | III - 28 |
| § 4-4 | 電荷再分布によるエミッタンス増加 | III - 31 |
| § 4-5 | Equipartitioning (2-D beam) | III - 33 |
| § 4-6 | Equipartitioning (3-D beam) | III - 35 |
| 第5章 | Equipartitioning と加速過程 | III - 37 |
| § 5-1 | Equipartitioning | III - 37 |
| § 5-2 | 加速過程 | III - 37 |
| 第6章 | 大強度陽子リニアックの基礎設計 | III - 41 |
| § 6-1 | はじめに | III - 41 |
| § 6-2 | 周波数の選定 | III - 41 |
| § 6-2-1 | ビーム孔半径の設定 | III - 42 |
| § 6-2-2 | 四極磁場勾配の設定 | III - 42 |
| § 6-2-3 | エミッタンスの増加 | III - 44 |
| § 6-2-4 | 三種類の周波数によるシミュレーション | III - 45 |

| | | |
|---------|-------------------------|----------|
| § 6-3 | 200 MeV - DTL の概要 | III - 46 |
| § 6-3-1 | 将来の拡張性 | III - 46 |
| § 6-3-2 | 加速電場について | III - 48 |
| § 6-3-3 | SDTL の検討 | III - 49 |
| § 6-3-4 | CCL の検討 | III - 52 |
| § 6-3-5 | DTL への入射 | III - 53 |
| 第7章 | Code LINSAC | III - 58 |
| § 7-1 | はじめに | III - 58 |
| § 7-2 | 計算法 | III - 58 |
| § 7-3 | ユニットセル内の運動 | III - 59 |
| § 7-4 | 加速過程の検討 | III - 60 |
| § 7-5 | 衝突 (ビーム内衝突) | III - 62 |
| おわりに | | III - 64 |
| 参考文献 | | III - 65 |

第1章 はじめに

第一世代の陽子リニアックができてから久しい。第二世代の高エネルギー大強度陽子リニアックは現実には、いまだ実現されていないと言ってよいだろう。第一世代のリニアックの性能がよかったことが原因の一端ではあるが、新たな需要に迫られなかったという事情もある。この間、リニアックの諸技術は着実に進歩した。

第一に低エネルギー領域においてRFQリニアックが発明され実用化された。RFQは効率のよいバンチングを行い、後続のドリフトチューブリニアック(DTL)への入射エネルギーを、従来のコッククロフトウォルトン型の静電加速器に比べて、飛躍的に高くできる。又、縦方向のビームのエミッタンスの広がりを押さえる事ができるので、実験と理論との比較がより正確に行なえるようになった。RFQの登場により、第一世代の周波数200MHzに比べて、高い周波数の選択が可能となった。

第二に、第一世代のリニアックにおいて見られるビームの振る舞いが研究され、特に空間電荷効果によるエミッタンス増加、縦と横の間のエミッタンスtransferなどが次第に理論的に明らかになった。

第三に、以上を踏まえて、理想的なビームの入射と加速過程のパラメーターは何かという事があきらかになってきた。

第四に、コンピューターシミュレーションの進歩により、上記理論による予測をコンピューターシミュレーションで検証する事が可能となった。

このような観点に立てば、今後建設されるリニアックのあるべき姿があきらかになって来る。即

ち、そのリニアックの要求仕様を満たすべきである事は勿論であるが、更に、性能が優れたリニアックを追及すれば、そしてそれが大強度リニアックであるとすれば、この30年間の間に蓄積された知識に立脚して、そのデザインがなされるべきであるという事である。

さて、上記の新しい理論は、rms envelope equationをその基礎に置いている。それは、ほとんど線形な空間電荷効果の枠組みの中で、非線形効果を論じる事を意味しており、シミュレーションコードにおいては、空間電荷効果としてPoisson's equationを解き、平均化されたクーロン場を使う事に対応する。最近ビーム損失との関連でビームハローが話題となっている。ビームハローを考えるには、従来は捨て去られていたクーロン場の近接部分も取り入れて考えた方がいいのではないかというのが、筆者が新しいコードを作った理由であり(第7章)、理論との整合性からみても、少なくともすっきりすると考えられる。この部分は、まだ確立されているわけではないので、本稿には乗せられなかったが、コードを作るという作業は、省みすれば、結構勉強になるものであるという実感があり、何かの機会があれば挑戦したらどうかと思う。

リニアック用の加速管についても進歩があった。

第一にRFQ空洞が開発実用化された。

第二にCCL(Coupled Cavity Linac)のタイプでは、APS(Alternate Periodic Structure)がKEK TRISTANで実用化され、ACS(Annular Coupled Structure)もKEKで実用化の目処がついた。ロシアではDAW(Disk and Washer structure)が実用化されている。LANLのSCS(Side Coupled Structure)

は、その後他の研究所でも採用されている。正直に言えば、これらは、いずれも長所と短所を合わせ持つ。従って、これこそ、仕様に従って選択がなされるべきであり、最後はコストと趣味の問題(どこに力点をおくか)となる。

第三に、中エネルギー領域加速管にも、新たな進展が見られた。高い周波数に対応して、小さいDTLタンクの構造が開発され、永久四極磁石も開発され、実用化の目処がついた。しかしながら、大強度ビームをピークビーム電流の増加により達成しようとする戦略にたてば、横方向のチューンを固定する方法は得策ではない。四極電磁石による可変チューンを選ぶと、これは逆に高い周波数の選択を不可能にする。解決策は色々と考えられる。どこかに無理を強いるやり方は望ましくないと思うが、趣味が別れる所である。JHPでは、中高エネルギー領域の加速管としてSDTL (Separated-type DTL、参考文献1)の採用を検討しているが(第6章)、これは特別新しい構造というわけではなく、機能を空間的に分離させて、一層優れた総合的性能を得ようとする試みである。

このような状況を踏まえて、本稿では新しいリニアックの設計について解説する事にした。要約すれば、equipartitioningをふまえて、縦と横のcoupled envelope equationsを適用するという事になる。この簡単な主題に到達する前の序奏部分が長くなってしまった。その為、大強度に特有のビームローディングの問題と高周波源そして加速管構造については、全て別の機会に譲り、加えて筆者が今迄に遭遇していない諸問題には言及出来なかった。

題目中の大強度の意味について述べておこう。

1985年にKEKのブースターシンクロトロンで負水素を使った荷電変換入射を採用した事に対応して、陽子リニアックの出力エネルギーは20 MeVから40 MeVに増強された。20 MeV時代のリニアックのビームは、ピーク電流は100 - 200 mAと高いが、ビームのパルス長さは5 μsec程度であり、平均電流にすれば10 μA程度であった。エネルギー増強後は、ピーク電流は10 mA程度に下がったがパルス幅を延ばして平均電流の増加が可能となった。これに対してJHPの初期計画では、繰り返し周波数25 Hz、ピーク電流30 mA、パルス幅400 μsecとすれば、平均電流は300 μAとなる。大強度とは、このように平均電流が大きい事を意味しており、ピーク電流で言えば、最大でも100 mA以下を対象とする。これはspace-charge limitの領域ではないが、space-chargeが無視出来ない領域と考えられる。

第2章 加速以前の諸問題

§ 2-1 イオン源

この章の内容に著者は詳しくないが、後で少し必要となるので、最小限を列挙する。詳しくは参考書で当たられたい。水素イオン源を想定する。イオン源のプラズマの速度分布はMaxwellの速度分布に従う。

$$f(v_x, v_y, v_z)dv_x dv_y dv_z = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m}{2k_B T}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\right] dv_x dv_y dv_z \quad (2-1-1)$$

$k_B = 1.3805 \times 10^{-23}$ [J K⁻¹] Boltzmann's constant,

T=plasma temperature,

$m=1.673 \times 10^{-27}$ [kg] proton mass.

等方的な場合に、rms 平均速度は

$$\tilde{v}_x = \tilde{v}_y = \tilde{v}_z = \left(\frac{k_B T}{m} \right)^{1/2} \quad (2-1-2)$$

引き出し電圧 V_0 を加速ギャップ d にかけて、半径 r_s の円孔から引き出すイオン電流 I は、Child-Langmuir law により記述される。

$$I = 1.67\pi \times 10^{-3} \left(\frac{q}{mc^2} \right)^{1/2} V_0^{3/2} \left(\frac{r_s}{d} \right)^2 \quad (2-1-3)$$

q は電荷、 c は光速を表す。上式は、電流の上限を与える。 $I/V_0^{3/2}$ はビームの perveance と呼ばれる。実際には、その他の付加条件が利用出来る電流を下げる。まず、引き出し電圧には放電により決まる現実の制限がある。Keller による経験則は

$$d = 1.4 \times 10^{-3} V_0^{3/2} \quad (2-1-4)$$

ここでは、 d は cm、電圧は kV の単位である。また、引き出しの形状を示すアスペクト比は、ビームの性質の劣化を起こさない為に、下記の範囲が望ましいとされる。

$$0.5 \leq \frac{r_s}{d} \leq 1.0 \quad (2-1-5)$$

半径 r_s のビーム孔から引き出されたビームの rms 半径は、その密度分布が一様ならば

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{r_s}{2} \quad (2-1-6)$$

ビームの性質を表す有用なパラメーターとして有効規格化エミッタンスを次式で定義する (次節参照)。

$$\epsilon_{xn} = 4\bar{x} \frac{\tilde{v}_x}{c} \quad (2-1-7)$$

(上式は既に $\beta=v/c$ をかけて規格化してある)

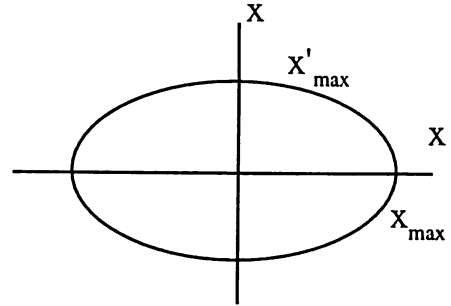


図 2 - 1 (x, x') 位相平面上の楕円。

従って

$$\epsilon_{xn} = 2r_s \left(\frac{k_B T}{mc^2} \right)^{1/2} \quad (2-1-8)$$

引き出し孔の大きさとプラズマの温度によりビームの原理的なエミッタンスが決まる。

§ 2 - 2 Emittance - 1

ビームを定量的に表す重要な指標のひとつがエミッタンスである。位相平面 (x, x') 上で、ビームが占める面積は次式で表される。

$$A_x = \iint dx dx' \quad (2-2-1)$$

ここで

$$x' = \frac{dx}{ds} = \frac{v_x}{v_0} = \frac{p_x}{p} \quad (2-2-2)$$

ビームの進行方向を z 軸にとり、その距離は $s = vt$ とし、運動量 p については、以下の仮定をする。

$$p_x \cdot p_y \ll p_z \approx p \quad (2-2-3)$$

扱う問題によりこの近似が破れる事もあるので注意する事。

図 2 - 1 の楕円の面積は

$$A_x = \pi x_{\max} x'_{\max} \quad (2-2-4)$$

上式から π を除いて、次式でエミッタンスを定義する。

$$\varepsilon_x = \frac{A_x}{\pi} = x_{\max} x'_{\max} \quad (2-2-5)$$

よく使われる単位は、m-rad、cm-mrad、mm-mrad 等である。

(2-2-1) より

$$A_x = \frac{1}{p} \iint dx dp_x = \frac{1}{\beta \gamma m c} \iint dx dp_x \quad (2-2-6)$$

上式の積分は、Liouville's theorem が成り立つ場合には定数となる。従って、次式で規格化エミッタンス (normalized emittance ε_{xn}) を定義すれば、加速により運動エネルギーが変化する場合にも、それは一定の値となる。

$$\varepsilon_{xn} = \beta \gamma \varepsilon_x \quad (2-2-7)$$

保存量となる故に規格化エミッタンスは重要であり、且つ有用性がある。Liouville's theorem が破れる場合、例えば、粒子間の衝突が重要となる時、 x, y, z の運動の間にカップリングがある時などは、規格化エミッタンスは保存しない。

以上の話はそのまま (y, y') 面のエミッタンスにも適用できる。縦のエミッタンスについては § 3-3 で後述する。

エミッタンスの位相平面上の形は普通楕円になるが、場合によっては蛇がとぐろを巻くような形もないわけではない。そうした時に、式 (2-2-1) を使って積分してエミッタンスが小さいとしても、それがそのまま加速器に使えるとは限らず、混乱のもとでもある。そこで、ビームの運動学的性質を

をより正しく反映するような定義が求められる。

rms エミッタンスを次式で定義する。

$$\bar{\varepsilon}_x = \sqrt{\overline{x^2 x'^2} - \overline{xx'}^2} \quad (2-2-8)$$

ここで、二乗平均は § 2-3 式 (2-3-10) により定義される。上により定義された rms エミッタンスは envelop eq. の中に組み込み、ビームの振る舞いを記述出来る (次節参照)。位相平面上でビームの楕円の傾きがゼロの場合には、(2-2-8) の根号内の第 2 項はゼロとなる。密度分布が一様な場合には、

$$\bar{\varepsilon}_x = \sqrt{\overline{x^2 x'^2}} = \frac{x_{\max} x'_{\max}}{4} \quad (2-2-9)$$

$$\bar{\varepsilon}_x = \bar{x} \bar{x}' = \bar{x} \frac{\bar{v}_x}{v_0} \quad (2-2-10)$$

ここで、max は楕円の長短軸の最大値を表す。(2-2-5) (2-2-9) より、

$$\varepsilon_x = 4 \bar{\varepsilon}_x \quad (2-2-11)$$

の関係がある。そこで、密度分布が一般的な時にも、有効 (effective) エミッタンスを rms エミッタンスの 4 倍として定義する。有効エミッタンスは、一様分布の場合には全粒子を含む事になる。非一様な分布では、分布により有効エミッタンスが含む粒子の全粒子に対する割合が変わる。規格化エミッタンスに対しても同様の関係が成り立つ。

$$\bar{\varepsilon}_{xn} = \beta \gamma \bar{\varepsilon}_x \quad (2-2-12)$$

$$\varepsilon_{xn} = 4 \bar{\varepsilon}_{xn} \quad (2-2-13)$$

$$x' = \frac{v_x}{v_z} \quad \text{だから} \quad (v_z \approx v_0)$$

$$\varepsilon_{xn} = 4 \gamma \bar{x} \frac{\bar{v}_x}{c} \quad (2-2-14)$$

(2-1-2) (2-4-18) より laboratory frame (実験室系) で

の温度を T_{\perp} と書くと

$$\tilde{\epsilon}_{xn} = \bar{x} \left(\frac{k_B T_{\perp} \gamma_0}{mc^2} \right)^{1/2} \quad (2-2-15)$$

rms エミッタンスは万能では無く、問題により、最適なエミッタンスの定義があると予測される。従って、いくつかのエミッタンスを組み合わせる必要があると、経験的に言えよう。

§ 2-3 Envelope equation の導出 - 1

ここで、Sacherer (参考文献2) による envelope equation の導出を紹介する。この式は Kapchinskij と Vladimirkij より 1959 年に初めて導かれた (参考文献3)。

単粒子の運動方程式に従う、粒子の集団を考える。質量 $m=1$ としている事に注意。

$$\dot{x} = p \quad (2-3-1)$$

$$\dot{p} = F(x, t) \quad (2-3-2)$$

$$F(x, t) = F_e + F_s \quad (2-3-3)$$

ここで F_e = the external force, F_s = the self-force (space charge force) を表す。粒子分布 $f(x, p, t)$ に関して平均をすれば

$$\dot{\bar{x}} = \bar{p} \quad (2-3-4)$$

$$\dot{\bar{p}} = \bar{F} = \bar{F}_e \quad (2-3-5)$$

$$\bar{F}_s = 0 \quad (\text{Newton の作用反作用の法則より})$$

外力が線形であるとすれば

$$F_e = -K(t)x \quad (2-3-6)$$

この時 (5) 式は

$$\ddot{\bar{x}} + K(t)\bar{x} = 0 \quad (2-3-7)$$

これから、粒子集団の中心の運動は、外力にのみ依存する事、及び粒子分布には依存しない事がわかる。外力は線形であると、以後は仮定する。

粒子密度 n は粒子の分布関数 f を積分すれば得られ、

$$n(x, t) = \int f(x, p, t) dp \quad (2-3-8)$$

以下の形で粒子集団の性質 (モーメント) を定義する。

平均 (1 次モーメント)

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \int x f(x, p, t) dx dp \quad (2-3-9)$$

2 次モーメント

$$\overline{x^2} = \frac{1}{N} \int x^2 f(x, p, t) dx dp \quad (2-3-10)$$

N は全粒子数を表す。

$$\frac{d}{dt} \overline{x^2} = 2 \overline{x\dot{x}} = 2 \overline{x p} \quad (2-3-11)$$

(2) (3) (6) より

$$\overline{x p} = \overline{\dot{x} p} + \overline{x \dot{p}} = \overline{p^2} - K(t) \overline{x^2} + \overline{x F_s} \quad (2-3-12)$$

rms emittance を次式で定義する。

$$\epsilon = \sqrt{\overline{x^2} \overline{p^2} - \overline{x p}^2} \quad (2-3-13)$$

しばしば factor 4 をかけて、実際のビームに一層近付けた定義があるので注意する。

$$\epsilon = 4 \sqrt{\overline{x^2} \overline{p^2} - \overline{x p}^2} \quad (2-3-14)$$

ここでは (13) を使用する。rms value を次式で表す。

$$X = \sqrt{\overline{x^2}} \quad (2-3-15)$$

$$\dot{\bar{x}}^2 = \dot{X}^2 = 2X\dot{X} = 2\overline{xp} \text{ だから}$$

$$\dot{X} = \overline{xp}/X \quad (2-3-16)$$

又 (16) を微分すれば、

$$(\dot{X})^2 + X\ddot{X} = \overline{xp} = \overline{p^2} - K(t)X^2 + \overline{xF_s} \quad (2-3-17)$$

(13) は

$$\epsilon^2 = X^2 \overline{p^2} - \overline{xp^2} \quad (2-3-18)$$

(16) (17) (18) より

$$\ddot{X} + K(t)X - \frac{\epsilon^2}{X^3} - \frac{\overline{xF_s}}{X} = 0 \quad (2-3-19)$$

線形な外力を仮定し、粒子間の相互作用を導入し、そしてrms emittance を使って、ビームのrms サイズの振る舞いが記述される。これまでの所では粒子の分布関数については何も言っていない。

envelope eq. の空間電荷効果の項は、力の線形な部分 $e(t)x$ と次の関係にある事が示された。

$$e(t)x = \frac{\overline{xF_s}}{X} x \quad (2-3-20)$$

これは次のD を最小にする条件より決まる。

$$D = \int [e(t)x - F_s(x,t)]^2 n(x,t) dx \quad (2-3-21)$$

故に、rms envelope eq. は最小二乗法により決められる力の線形部分にのみ依存する事がわかる。

様々な粒子分布について、(19) の最後の項を評価する場合に、重要なのはその線形な部分であり、分布自体の形にはあまりよらない。従ってこの観点からは、分布は違っていても同一ビームと見なす事ができる場合がある。これをconcept of equivalent beam と呼ぶ。即ち、同一の電流とエネルギーを持ち、2次のモーメントが等しい異なる分布は等価である。

(2-3-19) は時間領域の記述であるが、座標に変

換した方が便利な場合がある。そこで (2-3-19) の変数を位置に変えて普通の表式にもどると次式を得る。

$$X'' + k_{x0}^2 X - \frac{\bar{\epsilon}_x^2}{X^3} - \frac{\overline{xF_x}}{X} = 0 \quad (2-3-22)$$

但し

$$k_{x0}^2 = \frac{K}{m\gamma v^2} \quad (2-3-23)$$

$$F_x = \frac{F_s}{m\gamma v^2} \quad (2-3-24)$$

$$\bar{\epsilon}_x = \sqrt{x^2 x'^2 - xx'^2} \quad (2-3-25)$$

(2-3-13) で定義したエミッタンスは、運動量を使っているので、規格化したものとなっている。良く使われるのは、むしろ x と x' を使って定義する (25) の形である。エミッタンスについては人により記述法が違うので注意する。特に、rms value の定義、エミッタンスの定義に x' を使うか p を使うか、及びeffective にするために2又は4の因子を含むかどうか、normalized or not 等に注意する必要がある。細かい話だが、数字を比較する時にいらざる時間がかかる。

特に一様分布の2次元円筒形ビームの場合には $\overline{xF_x}$ は分布の形によらず

$$\overline{xF_x} = \frac{K}{2} \frac{X}{X+Y} \quad (2-3-26)$$

$$\overline{xF_x} + \overline{yF_y} = \frac{K}{2} \quad (2-3-27)$$

$$K = \frac{qI}{2\pi\epsilon_0 m v^3} \quad (2-3-28)$$

となるので、(2-3-22) は

$$X'' + k_{x0}^2 X - \frac{\bar{\epsilon}_x^2}{X^3} - \frac{K}{2} \frac{1}{X+Y} = 0 \quad (2-3-29)$$

ここで、有効エミッタンスとして (2-2-11) を使い、それに対応して有効、rms beam size の 2 倍を effective beam size と定義して、改めて X, Y と書くと次式を得る。

$$X'' + k_{x0}^2 X - \frac{\epsilon_x^2}{X^3} - \frac{2K}{X+Y} = 0 \quad (2-3-30)$$

§ 2-4 問題の背景

厳密さには欠けるけれども話の背景を簡単に紹介する。ビームの運動の話には、Liouville's theorem がよく登場する。同一粒子集団が 6 次元の分布関数 $f(q,p,t)$ により記述される時、Liouville's theorem は、位相空間の軌道に沿って分布関数が不変であるという事を述べており、次式で表される。

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = 0 \quad (2-4-1)$$

上式は、又、位相空間内の位相体積保存を意味しており、流体力学の言葉では非圧縮性、加速器の言葉ではエミッタンス保存と呼ばれる。ここで q,p は正準共役な座標と運動量であり、ハミルトンの運動方程式に従う。

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (2-4-2)$$

電磁場内のハミルトニアンは

$$H = c\sqrt{m^2 c^2 + (p - qA)^2} + q\phi \quad (2-4-3)$$

非相対論的には

$$H = \frac{1}{2m} (p - qA)^2 + q\phi \quad (2-4-4)$$

により与えられる。

(1) (2) より Vlasov equation が導かれる。

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (2-4-5)$$

電磁場中のローレンツ力を考えると

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_i \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (2-4-6)$$

荷電粒子間にはクーロン相互作用があり、 N 個の同種粒子系において i -th 粒子に働く力は、

$$\mathbf{F}_i = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j \neq i}^N \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \quad (2-4-7)$$

と表される。ここで対象とする粒子系は、(陽子リニアックでは) 静止系で非相対論的と考えてよい。(7) のクーロン力は長距離力なので、力を、ポテンシャルから導かれるような平均化された部分と、ある粒子が極めて近寄る事によるいわゆる衝突からの寄与に分離して考える。

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} q\phi_s + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_j \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \quad (2-4-8)$$

右辺第 1 項は (6) 式の電場に組み込む事ができる。第 2 項は衝突項として (6) の右辺に組み込まれ、Boltzmann eq. が導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{q}{m} (\mathbf{E}_a + \mathbf{E}_s + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_i \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \right) \\ = \left[\frac{\partial f}{\partial t} \right]_c \end{aligned} \quad (2-4-9)$$

ここで \mathbf{E}_a は外場、 \mathbf{E}_s は空間電荷による平均化された電場、右辺は衝突の寄与を表す。(9) の右辺がゼロでないという事 ($\frac{df}{dt} \neq 0$) は、Liouville's theorem が成り立たない事、そしてエミッタンス増加がありうる事を表している。こうした場合、即ち個々の粒子の衝突の効果が大きい時は、位相体積が保存される $6N$ 次元の空間まで拡張して考えなければい

けない。この目安として Debye length が使用される (§ 3-6 参照)。

衝突項は、次式でしばしば表現される。

$$\left[\frac{\partial f}{\partial t} \right]_c = \beta_f \frac{\partial(vf)}{\partial v} + D \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \quad (2-4-10)$$

ここで β_f は摩擦係数、 D は拡散定数 (等方的と仮定する) である。このとき (9) は

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{q}{m} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \beta_f \frac{\partial(vf)}{\partial v} + D \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \quad (2-4-11)$$

上式を Fokker-Planck eq. と呼ぶ。定常状態では次式が成り立つ。

$$\beta_f \frac{\partial(vf)}{\partial v} + D \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0 \quad (2-4-12)$$

上式を各速度成分についてとけば、Fokker-Planck eq. の定常状態を満足する分布は Gauss 分布であり、それは Maxwell の速度分布と一致する事が導かれる。

$$f(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2k_B T} \right) \quad (2-4-13)$$

ここで

$$\frac{D}{\beta_f} = \frac{k_B T}{m} \quad (2-4-14)$$

ここまでの解説からわかるように、Vlasov eq. (6) を満足する分布は多数考えられるが、それらは衝突の効果を含まない上に (collisionless Boltzmann eq. と呼ばれる)、実際のビームの分布との関係は簡単には明らかではない。しかし、(3) (4) からわかるように、平均化されたポテンシャルの形であらわされる粒子間の相互作用は含んでいる。別の言葉

で言えば、Vlasov eq. は、全ての粒子が互いに無相関に作る self-consistent な場を含んでいる。この結果、Vlasov eq. においては、time-reversal が成立する。これは、random な衝突による散逸効果を含まない事の結果でもある。一方、(13) で表される Maxwell 分布は、衝突の効果を含み、統計力学が一般に示す熱平衡状態を表しており、勿論 Vlasov eq. も満足する。(10) では衝突の効果 random な散逸効果として扱っていた。又一般に、調和振動子ポテンシャル内の粒子分布は、統計的に独立で random なプロセスにより、その変位は Gauss 分布となる。このように考えると、Maxwell-Boltzmann 分布を加速ビームの分布として採用する事は自然の成り行きである。静電ポテンシャル内の古典的なハミルトニアンを

$$H = \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + q\phi \quad (2-4-15)$$

と書くと

$$f(H) = f_0 \exp \left(- \frac{H}{k_B T} \right) \quad (2-4-16)$$

f_0 は規格化定数。ところで、イオン源内ではビームの等方性が保たれていたとしても、その後の加速過程により、ビームの横方向と縦方向の分布は異なると思われる。ビームの縦と横の運動の間に大きなカップリングがないとすれば、夫々の運動は独立とみなせて、

$$f(H_{\perp}, H_{\parallel}) = A \exp \left(- \frac{H_{\perp}}{k_B T_{\perp}} \right) \exp \left(- \frac{H_{\parallel}}{k_B T_{\parallel}} \right) \quad (2-4-17)$$

ここで、添え字により縦 (\parallel) と横 (\perp) を表す。バンチビームの場合には、縦と横の2種類の温度で分布が特徴づけられ、空間電荷効果を通じて、

2つの温度が互いにカップルする事になる。厳密に言えば、上の表式は空間電荷効果がゼロの場合か、非常に強くて空間電荷力が線形と見なせる時に成り立つ。連続ビームでは、外場による縦のポテンシャルがないので、 $T_{\parallel}=0$ 、 $\bar{v}_z=0$ となり、全ての粒子は同じ z 方向への同一速度 v_z を持つ。逆に $T \neq 0$ は速度分布がある事を示している。

温度に関しては laboratory frame 上の温度 T_ℓ と、beam (rest) frame 上の温度 T_b との関係が問題となる。ここでは参考文献の4の § 5.4.3 で採用している

$$T_\ell = \frac{T_b}{\gamma_0} \quad (2-4-18)$$

とする。これには異論もあるので、更には参考文献4の ref. を読むとよい。

Maxwell-Boltzmann 分布を座標で積分すれば、Maxwell の速度分布が得られ、速度空間で積分すれば、次の密度に関する Boltzmann 分布が得られる。

$$n(r) = n_0 \exp\left(-\frac{\phi(r)}{k_B T}\right) \quad (2-4-19)$$

$$\phi(r) = \phi_e(r) + \phi_s(r)(1-\beta^2) \quad (2-4-20)$$

ここで、 $\phi_e(r)$ は外場による収束力を表し、 $\phi_s(r)$ は Poisson 方程式を満たす空間電荷力による発散力なので、符号が逆である。上式より、空間電荷力が強くなって外場と等しくなれば、ビーム半径の中では密度が一定となり、ビームの境界がはっきりした分布となる。空間電荷力が弱く、外場のポテンシャルが2次で与えられる場合には、分布は Gauss 分布となる。式 (2-4-20) は、加速によりエネルギーが増大すれば、空間電荷効果は減少する事を示している (§ 2-5 参照)。従って、低エネルギー領域では、空間電荷効果が強くて密度が一定のビーム

は、加速につれて分布が Gauss 的に広がる。これは、ビームの裾野がビーム損失につながる事、非線形な力が増大してエミッタンスの増減の原因となる事など、大強度陽子リニアックでは重要なポイントとなる (§ 3-6 参照)。

§ 2-5 軸対称円筒ビームの空間電荷効果

電荷 q の粒子が半径 a の内部に一様分布し、 z 方向へ速度 v で流れる無限円筒ビーム電流 I を考える。単位長さ当たりの粒子数を N とすれば、

$$I = Nqv \quad (2-5-1)$$

このビームが作る電磁場は、

$r < a$ の時

$$E_r = \frac{Nq}{2\pi\epsilon_0 a^2} r \quad (2-5-2)$$

$$H_\phi = \frac{Nqv}{2\pi a^2} r \quad (2-5-3)$$

$r > a$ の時

$$E_r = \frac{Nq}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (2-5-4)$$

$$H_\phi = \frac{Nqv}{2\pi} \frac{1}{r} \quad (2-5-5)$$

r の位置を動く粒子に働く発散力は、

$$F_r = qE_r - qv\mu_0 H_\phi = qE_r(1-\beta^2) \quad (2-5-6)$$

これより、速度が増すと磁場の効果が、より強くなり、全体としての発散力を弱める事がわかる。この磁場の効果は、さりげなく γ^2 と記述されている事が多いので注意する。

Field energy

上の例を使って、場のエネルギーを求める。無限大まで積分する意味はなく、十分離れた半径 b の導体円筒を考えて、エネルギーの変化分を、以後の対象とすればよい。

$$W = \frac{1}{2} \int_0^b (\epsilon_0 E^2 - \mu_0 H^2) 2\pi r dr$$

$$= W_0 \left(1 + 4 \ln \frac{b}{a} \right) \quad (2-5-7)$$

$$W_0 = \frac{(Nq)^2}{16\pi\epsilon_0} (1 - \beta^2) = \frac{(Nq)^2}{16\pi\epsilon_0 \gamma^2} \quad (2-5-8)$$

しばしば $\gamma=1$ として省略される。

一様ビームの場合にこのエネルギーを W_u と書き、一般の分布に対して、次の量を non-linear field energy と定義する。

$$U = W - W_u \quad (2-5-9)$$

U は常に正であり、一様分布に比べて、余分なエネルギー源として、エミッタンス増加の原因となる(第4章参照)。

§ 2-6 軸対称バンチビームの空間電荷効果

一様分布した楕円体バンチが作る電場は以下の参考文献に示されている。

1) Reiser (参考文献4) の引用文献は、

I. M. Kapchinsky, Theory of Resonance Linear Accelerators, Chap. 3.1. しかし、この中では、次を ref. にしている。L. N. Sretenskii, Theory of Newton's Potential, 1946.

この Kapchinsky は面白い本と思われる。

2) Mittag (参考文献5) の引用文献は、

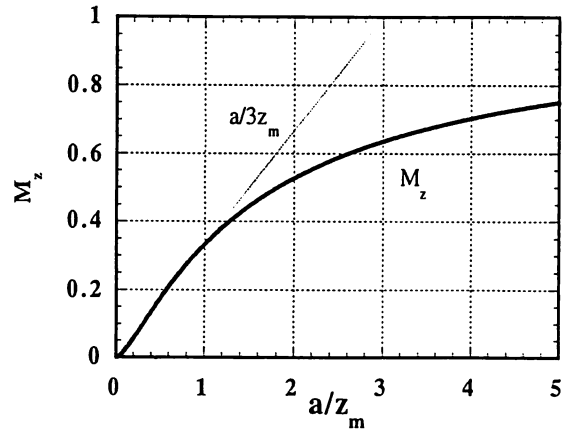


図 2-2 Ellipsoid form factor M_z .

1. A. D. Vlasov, Theory of Linear Accelerator(1968).

2. O. D. Kellogg, Foundations of Potential Theory(1953).

3) Wangler (参考文献6) の引用文献は、

R. L. Gluckstern, "Space-Charge Effects," in Linear Accelerators (1970). しかしこの中では次を引用している。Lapostolle, CERN Rept. AR/Int SG/65-15 (1965).

4) Hofmann (参考文献7) は Appendix A で導出している。

詳しくはこれらを参照していただき、ここでは結果を引用する。進行方向の軸長 z_m 、横方向 (x, y について対称とする) の軸長 a の楕円体バンチを考えると、バンチ内の電場は次の式で与えられる。

$$E_{\rho x} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} (1 - \beta_0^2) M_x x \quad (2-6-1)$$

$$E_{\rho y} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} (1 - \beta_0^2) M_y y \quad (2-6-2)$$

$$E_{\rho z} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} M_z z \quad (2-6-3)$$

$$M_x + M_y + M_z = 1 \quad (2-6-4)$$

$$M_x = M_y \text{ ならば } M_x = M_y = \frac{1 - M_z}{2} \quad (2-6-5)$$

$a < z_m$ の時

$$M_z = \frac{1-\xi^2}{\xi^3} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+\xi}{1-\xi} - \xi \right) \quad (2-6-6)$$

$$\xi = \sqrt{1 - \frac{a^2}{z_m^2}} \quad (2-6-7)$$

$a > z_m$ の時

$$M_z = \frac{1+\xi^2}{\xi^3} \left(\xi - \tan^{-1} \xi \right) \quad (2-6-8)$$

$$\xi = \sqrt{\frac{a^2}{z_m^2} - 1} \quad (2-6-9)$$

$a = z_m$ の時

$$M_x = M_y = M_z = \frac{1}{3} \quad (2-6-10)$$

電流、電荷密度、周波数 f には以下の関係がある。

$$I = \frac{4\pi}{3} a^2 z_m \rho_0 f = Qf = qNf \quad (2-6-11)$$

この関係を使って書き直すと

$$E_{px} = \frac{3Z_0}{4\pi} \frac{I\lambda}{a^2 z_m} (1 - \beta_0^2) M_x x \quad (2-6-12)$$

$$E_{py} = \frac{3Z_0}{4\pi} \frac{I\lambda}{a^2 z_m} (1 - \beta_0^2) M_y y \quad (2-6-13)$$

$$E_{pz} = \frac{3Z_0}{4\pi} \frac{I\lambda}{a^2 z_m} M_z z \quad (2-6-14)$$

ここで

$$Z_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c} = 376.7 \Omega \quad (2-6-15)$$

は真空のインピーダンスを表す。

図 2-2 に M_z を示す。よく使われる次の近似式も図示してある。適用範囲は図から判断するとよい。

$$M_z \approx \frac{1}{3} \frac{a}{z_m} \quad (2-6-16)$$

M_z を ellipsoid form factor と呼ぶ。

第 3 章 空間電荷効果を含む基本式

空間電荷効果を含まない運動方程式については、'OHO' 84 ライナックとその周辺第 2 章' (参考文献 8) にまとめてあるので、参考にしてほしい。ここではバンチビームの線形な空間電荷力(前章)を取り入れて、それらの式を修正する(参考文献 5)。

§ 3-1 縦の運動

軸付近の運動を考え、安定位相 ϕ_s (安定位相は負の符号と仮定する)、速度 v_0 の安定粒子がバンチの縦方向の中心 ($z=0=s-s_0$, $s=vt$) に位置すると仮定する。安定粒子(添字 0 で表す)に対して

$$\frac{dW_0}{ds} = qE_m \cos \phi_s \quad (3-1-1)$$

その他の粒子に対して

$$\frac{dW}{ds} = qE_m \cos \phi + qE_{sz} \quad (3-1-2)$$

ここで、 $E_m = E_0 T$ であり、 T (transit time factor) を含めて考える。 E_{sz} は z 方向の空間電荷力であり、

$$E_{sz} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} M_z z \quad (3-1-3)$$

上式からわかるように、 z 方向の空間電荷力は線形としている。安定粒子との位相差を変形すると次式が得られる。この操作により、縦方向の収束に使われる外場を、加速部分と切り離して考える事になる。

$$\frac{d}{ds} (\phi - \phi_s) = \frac{d}{ds} \Delta\phi = -\frac{2\pi}{\lambda \beta_0^3 \gamma_0^3} \frac{\Delta W}{mc^2} \quad (3-1-4)$$

上の関係を使うと

$$\frac{1}{\beta_0^3 \gamma_0^3} \frac{d}{ds} \left(\beta_0^3 \gamma_0^3 \frac{d\Delta\phi}{ds} \right) = \frac{q}{mc^2}$$

$$\times \left[-\frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{\beta_0^3 \gamma_0^3} E_m (\cos \phi - \cos \phi_s) + \frac{1}{\beta_0^2 \gamma_0^3} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} M_z \Delta \phi \right] \quad (3-1-5)$$

ここで \cos の 2 次の展開まで考慮すれば

$$\frac{1}{\beta_0^3 \gamma_0^3} \frac{d}{ds} \left(\beta_0^3 \gamma_0^3 \frac{d\Delta\phi}{ds} \right) = -k_\ell^2 \left(1 + \frac{\Delta\phi}{2\phi_s} - \mu_\ell \right) \Delta\phi \quad (3-1-6)$$

但し

$$k_\ell^2 = -\frac{q}{mc^2} \frac{2\pi}{\lambda} \frac{E_m \sin \phi_s}{\beta_0^3 \gamma_0^3} \quad (3-1-7)$$

$$\begin{aligned} \mu_\ell &= \frac{q}{mc^2} \frac{1}{\beta_0^2 \gamma_0^3} \frac{\rho_0 M_z}{\epsilon_0} \frac{1}{k_\ell^2} \\ &= \frac{\bar{\mu} M_z}{a^2 z_m k_\ell^2} \end{aligned} \quad (3-1-8)$$

ここで

$$\bar{\mu} = \frac{3Z_0}{4\pi} \frac{q}{mc^2} \frac{I\lambda}{\beta_0^2 \gamma_0^3} \quad (3-1-9)$$

k_ℓ は縦方向の波数であり、外からの収束力を表す。
 μ_ℓ は longitudinal space-charge parameter 呼ばれ、空間電荷力と外場による力の比を表している。ここで以下の置き換えを行う。

$$\phi_{sp} = \phi_s (1 - \mu_\ell) \quad (3-1-10)$$

$$k_{\ell p}^2 = k_\ell^2 (1 - \mu_\ell) \quad (3-1-11)$$

この時 (3-1-6) は

$$\frac{1}{\beta_0^3 \gamma_0^3} \frac{d}{ds} \left(\beta_0^3 \gamma_0^3 \frac{d\Delta\phi}{ds} \right) = -k_{\ell p}^2 \left(1 + \frac{\Delta\phi}{2\phi_{sp}} \right) \Delta\phi \quad (3-1-12)$$

となって、空間電荷効果を含まない場合の (3-1-6) と同じ形になる。これにより (線形な) 空間電荷効果が縦の運動に及ぼす効果がよくわかる。即ち、安定相が (3-1-10) の形で変位し、かつ収束力が

(3-1-11) の形で減る事になる。これは、縦方向のアクセプタンスの減少をもたらし、phase acceptance は

$$2\phi_s (1 - \mu_\ell) \leq \phi \leq -\phi_s (1 - \mu_\ell) \quad (3-1-13)$$

と $1 - \mu_\ell$ の因子相当分減少する。energy acceptance は

$$\Delta W_{\max} = \pm \sqrt{-\frac{2}{3\pi} \lambda q E_m mc^2 \beta_0^3 \gamma_0^3 \phi_s^3 (1 - \mu_\ell)^3} \quad (3-1-14)$$

縦方向の振動に寄与する電場を求めておくと (注目粒子と安定粒子との差)

$$\Delta E = E_m (\cos(\phi_s + \Delta\phi) - \cos \phi_s) = -E_{az} z \quad (3-1-15)$$

$$E_{az} = -\frac{2\pi}{\beta_0 \lambda} E_m \sin \phi_s \quad (3-1-16)$$

ここで

$$\Delta\phi = -\frac{\omega}{v_0} z = -\frac{2\pi}{\beta_0 \lambda} z \quad (3-1-17)$$

(12) (16) (17) を使うと

$$z'' + \frac{q}{mc^2} \frac{E_{az}}{\beta_0^2 \gamma_0^3} z - \frac{q}{mc^2} \frac{1}{\beta_0^2 \gamma_0^3} \frac{\rho_0 M_z}{\epsilon_0} z = 0 \quad (3-1-18)$$

(7) (8) (2-6-11) より電流を求めると、

$$I_\ell = -\frac{8\pi^2}{3Z_0} \mu_\ell \frac{a^2 z_m}{M_z} \frac{E_m \sin \phi_s}{\beta \lambda^2} \quad (3-1-19)$$

上式は縦方向の current limit を考える時の基礎となる。

§ 3-2 横の運動

出発点は OHO' 84 p.I-15 の (2.72) 式とする (参考文献 8)。横方向運動で考慮する力は、高周波発散力、外場による収束力、そして空間電荷効果による発散力である。高周波発散力として、OHO' 84

p.I-15 の (2.73) の形の中には、磁場の効果も既に入っている。空間電荷力としては、§ 2-6 を仮定する。一様分布の軸対称楕円体バンチを考えるので、その力は線形である。軸対称及び一様分布の仮定は多くの場合には成り立たないが、これを基本に考えるという主旨である。ここでは、外からの収束力として、とびとびに配置される四極磁石を考える。この収束力によりビーム全体として、周期が比較的長いベータートロン振動と、その上に乗る形で収束磁石周期の小さなリップルの振動とが引き起こされる。ここで着目するのは(多くの場合そうであるが)ベータートロン振動であり、リップルは無視する。これを smooth approximation と呼ぶ。この近似のもとでは、周期的な収束の場合でも、式の形は連続的な収束の場合と同形と出来るので、以下では、要すればそのように解釈する。

OHO' 84 p.I-15 の (2.72) 式に空間電荷力を入れると、

$$mc^2\beta_0 \frac{d}{ds} \left(\beta_0\gamma_0 \frac{dx}{ds} \right) = q \left(\frac{-\pi E_m \sin \phi}{\lambda \beta_0\gamma_0^2} + \frac{\rho_0 M_x}{\epsilon_0 \gamma_0^2} - c\beta_0 B' \right) x \quad (3-2-1)$$

B' は四極磁石の磁場勾配を表す。縦運動と同様に以下の波数を定義する。

$$k_{t,rf}^2 = -\frac{q}{mc^2} \frac{\pi E_m \sin \phi}{\lambda \beta_0^3 \gamma_0^3} \quad (3-2-2)$$

$$k_{t,q}^2 = \frac{q}{mc^2} \frac{cB'}{\beta_0\gamma_0} \quad (3-2-3)$$

$$k_t^2 = k_{t,q}^2 - k_{t,rf}^2 \quad (3-2-4)$$

$$\mu_t = \frac{q}{mc^2} \frac{\rho_0 M_x}{\epsilon_0 \beta_0^2 \gamma_0^3} \frac{1}{k_t^2}$$

$$= \frac{\bar{\mu} M_x}{a^2 z_m k_t^2} \quad (3-2-5)$$

$$k_{tp}^2 = k_t^2 (1 - \mu_t) \quad (3-2-6)$$

μ_t は transverse space-charge parameter と呼ばれ空間電荷力と外場による力の比を表している。以上を用いて (3-2-1) を書き直すと

$$\frac{1}{\beta_0\gamma_0} \frac{d}{ds} \left(\beta_0\gamma_0 \frac{dx}{ds} \right) = -k_{tp}^2 (1 - \mu_t) x = k_{tp}^2 x \quad (3-2-7)$$

上式では、線形な空間電荷効果は、外場の収束力を修正する働きとして記述されている。従って、外場を調整すれば、空間電荷力をキャンセル出来る事になる。実際には、外場の収束力は連続ではなく、その力の符号も変わり、非線形な空間電荷効果もあるなど、様子が変わる。

(5) (2-6-11) (3-4-36) より電流を求めると、

$$I_t = \frac{2\pi}{3Z_0} \mu_t \frac{mc^2}{q} \frac{a^2 z_m}{\lambda^3} \frac{\gamma_0^3 \sigma_{x0}^2}{1 - M_z} \quad (3-2-8)$$

上式は横方向の current limit を考える時の基礎となる。 σ_{x0} はゼロ電流の時の横方向ベータートロン振動の位相進みを表す。

§ 3-3 Emittance— 2

縦方向の諸量の定義を以下にまとめる。添え字 0 は、バンチの中心にあると仮定する安定粒子を表す。

$$s = vt, z = s - s_0, \Delta v_z = v - v_0, \Delta p_z = p - p_0$$

$$p_0 = mc\beta_0\gamma_0,$$

$$z' = \frac{dz}{ds} = \frac{\Delta v_z}{v_0} = \frac{1}{\gamma_0^2} \frac{\Delta p_z}{p_0} \quad (3-3-1)$$

unnormalized longitudinal rms emittance を次式で定義する (以下の rms を表す諸量では Δ を省略する)。

$$\bar{\epsilon}_z = \bar{z} \frac{\bar{p}_z}{p_0} \quad (3-3-2)$$

normalized longitudinal rms emittance は横エミッタンスの時と同じ関係で、

$$\bar{\epsilon}_{nz} = \beta_0 \gamma_0 \bar{\epsilon}_z = \bar{z} \frac{\bar{p}_z}{mc} \quad (3-3-3)$$

(3-3-1) を使うと、

$$\bar{\epsilon}_{nz} = \bar{z} \gamma_0^3 \frac{\bar{v}_z}{c} \quad (3-3-4)$$

となる。

effective emittance を横エミッタンスと同じように4倍で定義とすると

$$\epsilon_z = 4\bar{\epsilon}_z \quad (3-3-5)$$

横のエミッタンスと同様の定義 (§ 2-2 参照) の unnormalized longitudinal rms emittance $\bar{\epsilon}_{zz}$ を次式で定義する。

$$\bar{\epsilon}_{zz'} = \bar{z} \bar{z}' = \frac{1}{\gamma_0^2} \bar{\epsilon}_z \quad (3-3-6)$$

故に、

$$\bar{\epsilon}_{nz} = \beta_0 \gamma_0^3 \bar{\epsilon}_{zz'} \quad (3-3-7)$$

§ 2-1 (2-1-2) で温度を定義しているが、ここで、

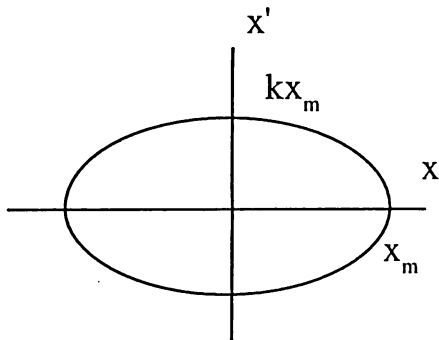


図 3-1 x - x' 位相平面上の楕円。

laboratory frame での横と縦の温度を、横質量と縦質量を考慮して次のように定義する。

$$k_B T_{\perp} = \gamma_0 m \overline{v_x^2} \quad (3-3-8)$$

$$k_B T_{\parallel} = \gamma_0^3 m \overline{v_z^2} \quad (3-3-9)$$

従って、縦のエミッタンスと温度との関係は、(4) (9) より

$$\bar{\epsilon}_{nz} = \bar{z} \left(\frac{\gamma_0^3 k_B T_{\parallel}}{mc^2} \right)^{1/2} \quad (3-3-10)$$

縦エミッタンスの単位は [m] である事が上式よりわかる。

次のように位相幅とエネルギー幅で定義する縦エミッタンスもしばしば使われる。

$$\begin{aligned} \epsilon_{\Delta\phi\Delta w} &= \Delta\phi \cdot \Delta w \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} mc^2 \beta_0 \gamma_0 \Delta z \frac{\Delta p}{p_0} = \frac{2\pi W_p}{\lambda} \epsilon_{nz} \end{aligned} \quad (3-3-11)$$

$$\epsilon_{nz} = 4\bar{\epsilon}_{nz} \quad (3-3-12)$$

ここで $W_p = mc^2$ 。

最後に温度の定義の補足をしておこう。式 (3-3-8) (3-3-9) で使われている速度は勿論 laboratory frame での速度である。beam (rest) frame での諸量に換算するには、特殊相対論の変換を考えると以下の注意が必要となる。

- 1) lab. frame では縦質量 $\gamma^3 m$ 、横質量 γm を使う。
- 2) 速度差に関しては次の変換を使う。
縦の運動 $\Delta v_{\text{lab}} = \Delta v_b / \gamma^2$
横の運動 $\Delta v_{\text{lab}} = \Delta v_b / \gamma$
- 3) 縦の $\Delta z_{\text{lab}} = \Delta z_b / \gamma$ とする。
- 4) 温度は縦横ともに $T_{\text{lab}} = T_b / \gamma$ とする。
- 5) 規格化エミッタンスは Lorentz 不変である。

§ 3-4 Envelope equation の導出 - 2

以下はおなじみの基本的な式であるので、細かい説明は省略する。

単振動の場合

$$x'' + k^2 x = 0 \quad (3-4-1)$$

$$x = x_m \cos(ks) \quad (3-4-2)$$

$$x' = -kx_m \sin(ks) \quad (3-4-3)$$

$$x'_{\max} = kx_m \quad (3-4-5)$$

$$\phi = \frac{1}{2} k^2 x^2 \quad (3-4-6)$$

x - x' 平面上の軌跡は図 3-1 に示す楕円上にある。

$$\frac{x^2}{x_m^2} + \frac{x'^2}{k^2 x_m^2} = 1 \quad (3-4-7)$$

収束力が周期的な場合

$$x''(s) + k_x(s)x = 0 \quad (3-4-8)$$

一般解は

$$x(s) = Aw(s) \cos(\psi(s) + \phi) \quad (3-4-9)$$

一般解が線形独立な基本解となる事から

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{w^2} \quad (3-4-10)$$

w が満たす微分方程式は

$$w'' + k_x w - \frac{1}{w^3} = 0 \quad (3-4-11)$$

解となる (x, x') が満たす楕円は

$$\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 = \varepsilon \quad (3-4-12)$$

と書ける。ここで、

$$\gamma = \frac{1}{w^2} + w'^2 \quad (3-4-13)$$

$$\alpha = -ww' \quad (3-4-14)$$

$$\beta = w^2 \quad (3-4-15)$$

$$\varepsilon = A^2 \quad (3-4-16)$$

であるから

$$x_m(s) = \sqrt{\varepsilon w(s)} = \sqrt{\varepsilon \beta(s)} \quad (3-4-17)$$

(11) (17) より envelope eq. は

$$x''_m + k_x x_m - \frac{\varepsilon^2}{x_m^3} = 0 \quad (3-4-18)$$

(10) (15) より次の位相進みを得る。

$$\sigma = \int \frac{ds}{w^2} = \int \frac{ds}{\beta} \quad (3-4-19)$$

縦の運動に関しても、式の形は同じであるから、(18) と同様の手続きにより envelope eq. が得られる。

縦の運動方程式は § 3-1 (3-1-18) より

$$z'' + k_{z0}^2 z - \frac{K_L}{z_m^3} z = 0 \quad (3-4-20)$$

ここで

$$k_{z0}^2 = \frac{qE_{az}}{mc^2 \beta_0^2 \gamma_0^3} \quad (3-4-21)$$

$$K_L = \frac{3}{2} \frac{g_0 N r_c}{\beta_0^2 \gamma_0^5} \quad (3-4-22)$$

$$g_0 = 2 \frac{z_m^2}{a^2} M_z \quad (3-4-23)$$

$$r_c = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \quad (3-4-24)$$

空間電荷の項 K_L はここでは Lorentz contraction の効果を入れて、 γ_0^2 が加わっている。この N は、粒子密度が一様分布するバンチ内の粒子数を表す (2-6-11)。

縦方向の envelope eq. は横と同様の手順で得られる。

$$z''_m + k_{z0}^2 z_m - \frac{K_L}{z_m^2} - \frac{\varepsilon_{zz}^2}{z_m^3} = 0 \quad (3-4-25)$$

横方向の envelope eq. を上と同じ形で記述する。まず、運動方程式は、§ 3-2 より、一様分布で軸対称なバンチを仮定するので

$$x'' + k_{x0}^2 x - \frac{q}{mc^2} \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \frac{M_x}{\beta_0^2 \gamma_0^3} x = 0 \quad (3-4-26)$$

(2-6-11) (24) を使って書き直すと

$$x'' + k_{x0}^2 x - \frac{3}{2} \frac{Nr_c}{\beta_0^2 \gamma_0^3 a^2 z_m} (1 - M_z) x = 0 \quad (3-4-27)$$

27)

と書ける。同様の手順で envelope eq. は

$$a'' + k_{x0}^2 a - \frac{3}{2} \frac{Nr_c}{\beta_0^2 \gamma_0^3} \frac{1}{az_m} (1 - M_z) - \frac{\varepsilon_x^2}{a^3} = 0 \quad (3-4-28)$$

M_z を書き直すと

$$a'' + k_{x0}^2 a - \frac{3}{2} \frac{Nr_c}{\beta_0^2 \gamma_0^3} \frac{1}{az_m} \left(1 - \frac{g_0}{2} \frac{a^2}{z_m^2} \right) - \frac{\varepsilon_x^2}{a^3} = 0 \quad (3-4-29)$$

この g_0 は、更にビームパイプによる image force の効果を取り込む為に使用していると思われるが、議論が細かいのでここでは紹介しない。

最後に、もっと簡単な表式を導出する。出発の式は、(3-1-12) と (3-2-7) である。

$$z'' + k_{\ell\rho}^2 z = 0 \quad (3-4-30)$$

$$k_{\ell\rho}^2 = k_{\ell}^2 (1 - \mu_{\ell}) \quad (3-4-31)$$

$$x'' + k_{\ell\rho}^2 x = 0 \quad (3-4-32)$$

$$k_{\ell\rho}^2 = k_{\ell}^2 (1 - \mu_{\ell}) \quad (3-4-33)$$

envelope eq. は同じ手続きで導く事が出来て

$$z''_m + k_{\ell\rho}^2 z_m - \frac{\varepsilon_{\ell}^2}{z_m^3} = 0 \quad (3-4-34)$$

$$a'' + k_{\ell\rho}^2 a - \frac{\varepsilon_{\ell}^2}{a^3} = 0 \quad (3-4-35)$$

波数と位相進みの間の関係は

$$\sigma = kL_f \quad (3-4-36)$$

L_f は収束の周期を表し、ドリフトチューブリアック (DTL) で FODO の場合には $N\beta\lambda$ ($N=2$) となる。従って

$$z''_m + (\sigma_{\ell}^{\ell})^2 (1 - \mu_{\ell}) z_m - (N\beta\lambda)^2 \frac{\varepsilon_{\ell}^2}{z_m^3} = 0 \quad (3-4-37)$$

$$a'' + (\sigma_{\ell}^{\ell})^2 (1 - \mu_{\ell}) a - (N\beta\lambda)^2 \frac{\varepsilon_{\ell}^2}{a^3} = 0 \quad (3-4-38)$$

$$\sigma_0^2 (1 - \mu) = \sigma^2 \quad (3-4-39)$$

ここで σ_0 は電流ゼロの時の位相進みを表す。matched beam の場合には、最後の3式より

$$\varepsilon_{\ell} = \frac{\sigma^{\ell} z_m^2}{N\beta\lambda} \quad (3-4-40)$$

$$\varepsilon_{\ell} = \frac{\sigma^{\ell} a^2}{N\beta\lambda} \quad (3-4-41)$$

($N=2$ for DTL)

(3-4-36) を使ってエミッタンスを書くと

$$\varepsilon_{\ell} = k_{\ell\rho} z_m^2 \quad (3-4-42)$$

$$\varepsilon_{\ell} = k_{\ell\rho} a^2 \quad (3-4-43)$$

§ 3-5 Envelope equation

準備が出来たので、ここで envelope eq. について基本的な事を考える。

uniform focusing 中の円形 2次元ビームを考える。

envelope equation は (2-3-29) より、

$$X'' + k_{x0}^2 X - \frac{\bar{\epsilon}_x^2}{X^3} - \frac{K}{2} \frac{1}{X+Y} = 0 \quad (3-5-1)$$

ここで $X = \bar{x}$ である。 $X=Y$ の時は

$$X'' + k_{x0}^2 X - \frac{\bar{\epsilon}_x^2}{X^3} - \frac{K}{4X} = 0 \quad (3-5-2)$$

rms matched beam とは、ビームの envelope が一定

のことをいう。この時 $X''=Y''=0$ となり、

$$a = \sqrt{2}r = 2X = 2Y = \text{const.} \quad (3-5-3)$$

と有効半径をおき、これに対応して 4 倍の有効エミッタンス $\epsilon = 4\bar{\epsilon}_x$ を用いて次式を得る。

$$k_0^2 a - \frac{\epsilon^2}{a^3} - \frac{K}{a} = 0 \quad (3-5-4)$$

これより、matched beam は四つのパラメーター (エミッタンス、ビームサイズ、外からの収束力、空間電荷効果) により決められる事がわかる。上式を变形すれば

$$ka^2 = \epsilon \quad (3-5-5)$$

$$k^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_f}\right)^2 = k_0^2 - \frac{K}{a^2} \quad (3-5-6)$$

ここで両極端な二つの場合を考える。

1) 空間電荷力が強くてエミッタンスの項が無視出来る場合

この時、 $\epsilon = 0$ とおくと、ビームサイズは

$$a_B = \frac{K^{1/2}}{k_0} \quad (3-5-7)$$

収束力と空間電荷力の釣り合いによりビームサイ

ズが決まる。laminar flow とか Brillouin flow と呼ばれる。

2) 空間電荷効果が無い場合

$K=0$ とおくと

$$a_0 = \left(\frac{\epsilon}{k_0}\right)^{1/2} \quad (3-5-8)$$

エミッタンスと収束力によりビームサイズが決まる。従って、

$Ka^2 > \epsilon^2$ の時を space-charge dominated regime、

$Ka^2 < \epsilon^2$ の時を emittance dominated regime、

と呼ぶ。両者の境は $Ka^2 = \epsilon^2$ と (3-5-6) より

$$\frac{k}{k_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707 \quad (3-5-9)$$

この時

$$\mu = 1 - \frac{k^2}{k_0^2} = 0.5 \quad (3-5-10)$$

この比を書き直すと、

$$\frac{Ka^2}{\epsilon^2} = \frac{k_0^2}{k^2} - 1 \quad (3-5-11)$$

これを見やすい形にすれば

$$\frac{Ka^2}{\epsilon^2} = \frac{1}{I_0} \frac{2a^2}{\beta\gamma\epsilon_n^2} = \frac{1}{I_0} \frac{\bar{x}^2}{2\beta\gamma\bar{\epsilon}_n^2} \quad (3-5-12)$$

$$K = \frac{1}{I_0} \frac{2}{\beta^3\gamma^3} \quad (3-5-13)$$

$$I_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 mc^3}{q} \approx \frac{1}{30} \frac{mc^2}{q} \approx 31 \text{ MA} \quad (3-5-14)$$

一般的には、(3-5-4) を解くと

$$a = a_B \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+u^{-2}}\right)^{1/2} \quad (3-5-15)$$

$$u = \frac{K}{2k_0\epsilon} \quad (3-5-16)$$

従って、空間電荷効果が無い時に (3-5-8) で決めら

れたビームサイズは、空間電荷の強まりと共に次第に増大して、最終的にはエミッタンスの寄与が無視出来る式 (3-5-7) で与えられる。又、(7) (8) を平均した次式は最大 15% 程度の誤差の近似となっている。

$$a \approx \left(\frac{K}{k_0^2} + \frac{\varepsilon}{k_0} \right)^{1/2} \quad (3-5-17)$$

ビームパイプの半径を a として、ビームラインのアクセプタンスを α とすれば、ビーム電流ゼロの時のビームエミッタンスと等しいとおいて、

$$\alpha = a^2 k_0 \quad (3-5-18)$$

(3-5-4) (3-5-18) より

$$K = k_0^2 a^2 - \frac{\varepsilon^2}{a^2} = k_0 \alpha \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{\alpha} \right)^2 \right] \quad (3-5-19)$$

(3-5-13) を使って書き直すと

$$I = \frac{I_0}{2} \beta^3 \gamma^3 k_0 \alpha \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{\alpha} \right)^2 \right] \quad (3-5-20)$$

従って最大電流は、アクセプタンスに比べてエミッタンスが無視できる場合であって (laminar beam limit、平行ビーム)、 $\sigma_0 = k_0 L_f$ を使うと最大電流は

$$I_{\max} = \frac{I_0}{2} \beta^3 \gamma^3 \frac{a^2}{L_f^2} \sigma_0^2 \quad (3-5-21)$$

3 MeV、324 MHz、位相進み 58 度、 $a=7$ mm、 $L_f = 2\beta\lambda$ の場合に、18 A となる。

§ 3-6 粒子分布

一様な収束力の中の、円筒ビームを例にして、Maxwell-Boltzmann 分布に従う粒子分布の変化とビームパラメータとの関係を考える。縦方向に

関しては、前提により収束のポテンシャルはゼロと考える事ができ、全ての粒子が等速とすれば、速度の広がり幅はゼロであり、縦方向の温度はゼロとなる。このとき、横方向の分布は

$$f = f_0 \exp\left(-\frac{H_{\perp}}{k_B T_{\perp}}\right) \quad (3-6-1)$$

$$H_{\perp} = \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2) + \phi_a + \phi_s \quad (3-6-2)$$

ここで外場の様な収束力のポテンシャルを次の形で書く。

$$\phi_a = \frac{1}{2} \gamma_0 m v_0^2 k_0^2 r_{\perp}^2 \quad (3-6-3)$$

上式は (3-2-3) を k_0^2 と記述した場合に相当する。

ϕ_s は空間電荷によるポテンシャルを表す。Laboratory frame の温度を使う事に注意して、次式を得る。

$$f = f_0 \exp\left[-\frac{\gamma_0 m v_0^2 (r_{\perp}^2 + k_0^2 r^2)}{2 k_B T_{\perp}} - \frac{q \phi_s(r)}{k_B T_{\perp} \gamma_0^2}\right] \quad (3-6-4)$$

但し、 $v_x = v_0 x'$ 、 $v_y = v_0 y'$ 、 $r_{\perp}^2 = x'^2 + y'^2$ である。密度分布は上式を r_{\perp} に関して積分して

$$n(r) = n(0) \exp\left[-\frac{\gamma_0 m v_0^2 k_0^2 r^2}{2 k_B T_{\perp}} - \frac{q \phi_s(r)}{k_B T_{\perp} \gamma_0^2}\right] \quad (3-6-5)$$

ここで空間電荷による電場は Gauss's law より

$$E_s(r) = \frac{q}{\varepsilon_0 r} \int_0^r n(r) dr \quad (3-6-6)$$

ポテンシャル ϕ_s は

$$\phi_s(r) = -\int_0^r E_s(r) dr \quad (3-6-7)$$

より決まる。上式は一般的に解析的に解く事は難しい。次の極限の場合には解ける。

space-charge limit の時

この時は、外場の収束力と空間電荷の発散力が
バランスしているので

$$\frac{\gamma_0 m v_0^2 k_0^2 r^2}{2} = -\frac{q\phi_s(r)}{\gamma_0^2} = \frac{q^2 n_0 r^2}{4\epsilon_0 \gamma_0^2} \quad (3-6-8)$$

密度分布は

$$n(r) = n_0 \text{ for } 0 \leq r \leq a_0$$

$$n(r) = 0 \text{ for } r > a_0$$

と、ビーム半径 a_0 の内部で一様になる。

空間電荷効果がゼロの時

$\phi_s = 0$ とおくと、

$$n(r) = n(0) \exp\left[-\frac{\gamma_0 m v_0^2 k_0^2}{2k_B T_\perp} r^2\right] \quad (3-6-9)$$

これは Gauss 分布である。従って、この中間の場合には、一様分布から Gauss 分布までの間で分布が変化することが予測される。図 3-2 に結果を示し、図に対応したパラメーターを表 3-1 に示す。

ここで、重要なパラメーターは、前節に現われた空間電荷効果とエミッタンスとの比であり、

$$\frac{Ka^2}{\epsilon^2} = \frac{k_0^2}{k^2} - 1 \quad (3-6-10)$$

$$\frac{\bar{\lambda}_D}{a} = \left(\frac{\epsilon^2}{Ka^2}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{8}\right)^{1/2} \quad (3-6-11)$$

$\bar{\lambda}_D$ は平均 Debye length であり、次式で定義する。

$$\frac{\bar{\lambda}_D}{a} = \frac{\lambda_D(0)}{a_0} \left(\frac{n(0)}{n_0}\right)^{1/2} \quad (3-6-12)$$

$$\lambda_D(0) = \left[\frac{\epsilon_0 k_B T_\perp \gamma_0^2}{q^2 n(0)}\right]^{1/2} \quad (3-6-13)$$

括弧内のゼロは $r=0$ を意味している。

特に space-charge limit に近い所の近似式は

$$n(r) = n_0 \left\{ 1 - \frac{\exp[(r-a)/\bar{\lambda}_D]}{\sqrt{r/a}} \right\} \quad (3-6-14)$$

であり (参考文献 9)、図 3-3 に示した。図中の番号は、図 3-2 の中の番号に相当する分布のパラメーターと一致している事を示している。

space-charge limit に近いビームを考えて、これがどのように変わり得るかを考えてみよう。ビームは一様分布に近く、従って横方向の温度も低い。 Ka^2/ϵ^2 は大きい値になっている。これが小さい値となる為には、式の形を見ると以下の原因が考えられる。

1) エミッタンスが大きくなる時。これは温度が高くなる事を意味している。

2) 粒子の運動エネルギーが上がる時。これは

$$K = \frac{1}{I_0} \frac{2}{\beta^3 \gamma^3}$$

の関係から明らかである。

3) 収束力が強くなり、ビーム半径が小さくなる時。

4) 電流が大きくなった時。これは、例えば、

generalized perviance K の中の電流は、バンチの場合にはバンチング因子を含めたピーク電流であるから、バンチ長さが長くなると K が小さくなる事を表す。

以上あげた 4 項目はいずれもビームの分布を一様分布から Gauss 分布の方向へ変化させる作用がある。

2 MeV から 1000 MeV までエミッタンスの増加なしに加速する時の密度分布の変化を考える。

入射：2 MeV, $\beta\gamma=0.065$, 100 mA, $\bar{\epsilon}_n = \beta\gamma\bar{\epsilon} = 0.2$ mm-

mrad, $\bar{x}=2$ mm, bunching factor $B_f = \frac{\bar{I}}{I} = 0.1$ とする

表 3 - 1 Relevant parameters for the radial Boltzmann density profiles of Figure 3 - 2.

| Curve | $n(0)/n_0$ | $\lambda_D(0)/a_0$ | \bar{r}/\bar{r}_0 | $\bar{\lambda}_D/a$ | Ka^2/ϵ^2 | k/k_0 | $n(0)/n_0$ for $\bar{r} = r_0$ |
|-------|------------|--------------------|---------------------|---------------------|-------------------|---------|--------------------------------|
| 1 | 0.1 | 4.82 | 4.43 | 1.52 | 0.054 | 0.974 | 1.96 |
| 2 | 0.25 | 1.81 | 2.75 | 0.905 | 0.153 | 0.931 | 1.89 |
| 3 | 0.5 | 0.795 | 1.88 | 0.562 | 0.396 | 0.846 | 1.77 |
| 4 | 0.75 | 0.432 | 1.46 | 0.374 | 0.893 | 0.727 | 1.60 |
| 5 | 0.95 | 0.229 | 1.18 | 0.223 | 2.51 | 0.534 | 1.32 |
| 6 | 0.995 | 0.145 | 1.08 | 0.144 | 6.00 | 0.378 | 1.16 |
| 7 | 0.9995 | 0.107 | 1.04 | 0.107 | 10.9 | 0.290 | 1.08 |
| 7a | 0.999995 | 0.0710 | 1.02 | 0.0710 | 24.8 | 0.197 | 1.04 |
| 8 | 1 | 0 | 1 | 0 | ∞ | 0 | 1 |

(表 3 - 1 と図 3 - 2 は参考文献 4 の § 5.4.4 より引用)

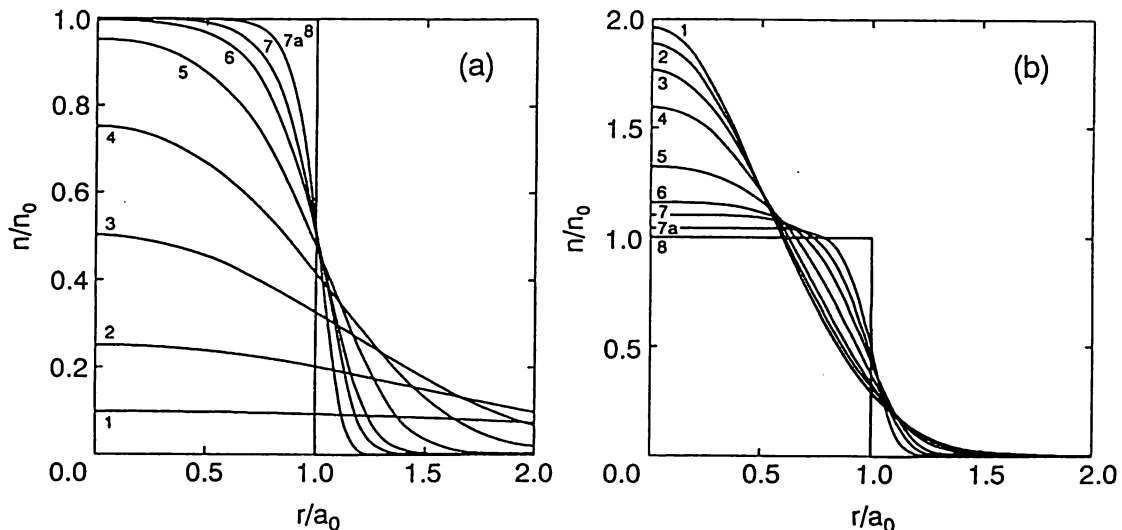


図 3 - 2 Radial profiles of the transverse Maxwell-Boltzmann distribution in a uniform focusing system for different temperatures. All beams have the same number of particles per unit length. (a) The focusing force is kept constant so that the beam width increases with increasing temperature. (b) The focusing force is increased to keep the rms radius constant.

と $I=1$ A となる。

出力：1000 MeV, $\beta\gamma=1.81$ とする。

加速過程において、簡単の為に横の収束は、 $I\bar{x}^2 =$ 一定となるように行なうと仮定する。この時、ビームパラメーターは

$$\text{入射時： } \frac{Ka^2}{\epsilon^2} = 24.8, \quad \frac{k}{k_0} = 0.2, \quad \frac{\bar{\lambda}_D}{a} = 0.07$$

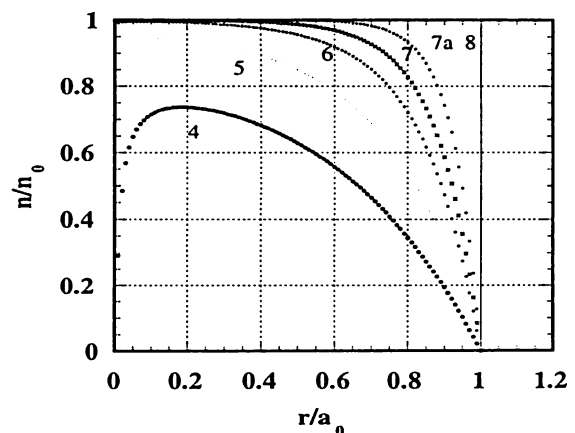


図 3 - 3 式 (3-6-14) による粒子密度分布。

$$\text{加速後: } \frac{Ka^2}{\epsilon^2}=0.89, \frac{k}{k_0}=0.73, \frac{\bar{\lambda}_D}{a}=0.37$$

となる。従って、入射時のビームの分布は、space-charge dominated であり、図 3-2 の番号 7a に対応して一様分布に近く、加速後は emittance dominated の領域にあり、図 3-2 の番号 4 に対応して Gaussian である。即ち、加速によりビーム分布が Gaussian となり、これは長いテイル部分が、いわゆるハローと同程度の広がりを持ち、ビームロスの原因と成りうる事を示している。この観点に立てば、 Ka^2/ϵ^2 を出来るだけ大きく保って、ビームの分布を一様分布に近付けるような加速過程のパラメーターの選び方が望ましい。

この結果は、Maxwell-Boltzmann 分布を仮定した結果であるから、そこでは、random 過程としての衝突の効果が含まれている事が指摘出来る。

(3-6-13) に Debye length が出てきたので補足しておこう。よく知られているように、これはプラズマの遮蔽効果の目安となる長さであり、同数の電子と陽子からなる Maxwell 分布に従う熱平衡なプラズマでは、密度分布は Boltzmann の関係式により

$$n(r) = n_0 \exp\left[-\frac{q\phi(r)}{k_B T}\right] \quad (3-6-15)$$

ポテンシャルは Poisson's eq. により関連づけられ、

$$\nabla^2 \phi = -\frac{q}{\epsilon_0} (n_i(r) - n_e(r)) = \frac{2\phi(r)}{\lambda_D^2} \quad (3-6-16)$$

$$\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 k_B T}{q^2 n_0}\right)^{1/2} \quad (3-6-17)$$

但し $q\phi(r) \ll k_B T$ とした。添え字 i は陽子、 e は電子を表す。(3-6-16) を解けば

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}r}{\lambda_D}\right) \quad (3-6-18)$$

一般にプラズマ周波数は次式で定義される。

$$\omega_p = \left(\frac{q^2 n}{\epsilon_0 m}\right)^{1/2} \quad (3-6-19)$$

プラズマ周波数と Debye length の間には次の関係が成り立っている。

$$\lambda_D = \frac{\bar{v}_x}{\omega_p} \quad (3-6-20)$$

加速ビームのプラズマ周波数を求める為に § 2-5 (2-5-6) を使って粒子の r -方向の運動方程式を書くと、

$$\gamma m \ddot{r} = F_r = \frac{Nq^2}{2\pi\epsilon_0 a^2} (1 - \beta^2) r \quad (3-6-21)$$

従って、

$$\ddot{r} = \frac{1}{2} \omega_p^2 r \quad (3-6-22)$$

$$\omega_p = \left(\frac{q^2 n_0}{\epsilon_0 m \gamma^3}\right)^{1/2} \quad (3-6-23)$$

ここで $n_0 = N/\pi a^2$ とおいた。(19) と (23) を比較すれば、因子 γ^3 が増えている事と、その由来がわかる。(3-3-8) (20) (23) より laboratory frame では、

$$\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 k_B T \gamma^2}{q^2 n_0}\right)^{1/2} \quad (3-6-24)$$

となり、(3-6-13) と一致する。

加速ビームでは、ビーム半径と Debye length との間には次の 3 種の関係が考えられる。

$$1) \lambda_D \ll a$$

空間電荷力が優位であり、粒子の熱運動は無視でき、従って、縦横の温度はゼロに近づき、laminar

flow となり、一様な分布となる。従って空間電荷力も線形である。

2) $\lambda_D \approx a$

粒子の熱運動が大きくなり、空間電荷効果と同等になれば、一様な分布から非一様な Gauss 分布の方向に変化し、従って非線形な力も生まれてくる。ビームの扱いも難しくなる。

3) $\lambda_D \gg a$

空間電荷力が無視出来る事になり、Gauss 分布となる。

case (1) (2) では、空間電荷力の平均化された部分 (2-4-8) の寄与が重要である。 λ_D が小さくなって、個々の粒子の間の距離と同等以下になれば、式 (2-4-8) の右辺第 2 項の衝突の寄与が大きくなり、6次元の Liouville's theorem から出発する取り扱いが難しくなるが、我々の扱う加速器ビームでは、そのような事はほとんどない。

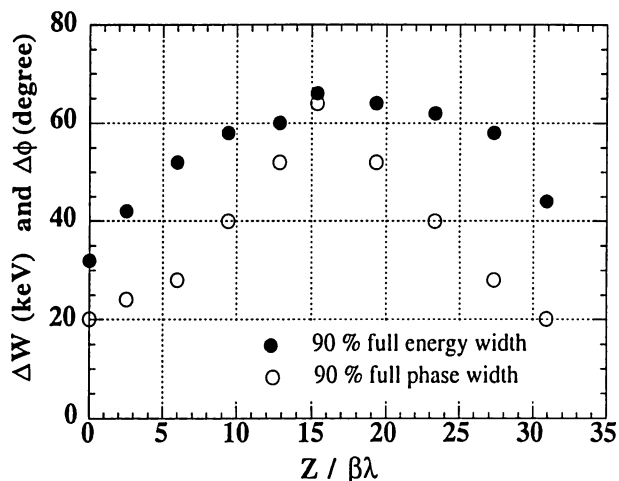


図 3-4 RFQ と DTL の間のビームラインにおけるバンチの位相幅とエネルギー幅の推移。ZはRFQ出口から測ったの距離を表す。 $\beta\lambda$ で規格化している。 $Z/\beta\lambda=15$ 付近にバンチャーが配置されている。空間電荷効果がなければ、エネルギー幅は一定である。

ここで非線形な力の例をあげておこう。RFQ から出力されるビームは、縦横ともに強い収束力により締めつけられていた状態から開放されて、続くビームラインでは、位相幅とエネルギー幅は図 3-4 に示すように増大を始める。そこで、ラインの中間にバンチャーをおいて、次の DTL 入射の条件にマッチするようにする。空間電荷効果が線形ならば、図 3-4 の右端の DTL への入射部においては、図 3-4 の左端の RFQ 出口を再現出来るはずであるが、シミュレーションでも非線形効果があつてなかなか難しい。図 3-5 は、RFQ から出力された直後のバンチ内の各粒子に働く縦方向の電場を示している。斜めの線は、一様分布と仮定したときの線形な電場である。この線からのズレが非線形な空間電荷効果と言える。この計算は 3次元バンチを用いて code LINSAC のビームライン部分を使って行った。

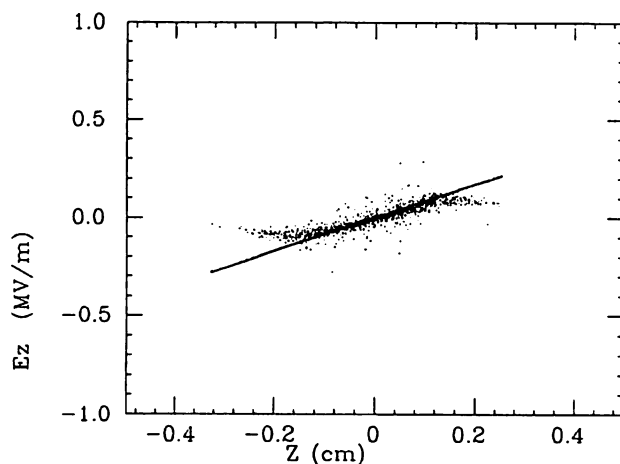


図 3-5 RFQ 直後のビームラインにおいて、バンチ内の各粒子に働く縦方向の空間電荷力による電場。斜めの線は一様分布していると仮定して求めた線形な電場。

§ 3-7 基本的な式のまとめ

まとめておくと便利と思われる式を集めておいた (DTL を想定する)。

長さ $L = \beta\lambda$ の加速セルによる加速ゲイン

$$\Delta W = E_0 T L \cos \phi_s$$

上式は長さをリニアックの全長にとって、平均の概算にも使われる。

長さ L_a の加速管の励振電力

$$P_{rf} = \frac{E_0^2 L_a}{Z}$$

ビーム電力 (ピーク)

$$P_b = I_{peak} \Delta W$$

必要な電力

$$P_{tot} = P_{rf} + P_b$$

縦方向の zero-current 位相進み (1 セル当り)

$$\sigma_0^\ell = \cos^{-1} \left[1 + \frac{\pi E_0 T \lambda \sin \phi_s}{W_0 \beta} \right] \quad (\gamma \approx 1)$$

$$W_0 = \frac{mc^2}{q}$$

$$k_\ell^2 = -\frac{q}{mc^2} \frac{2\pi E_m \sin \phi_s}{\lambda \beta^3 \gamma^3}$$

縦方向の位相進み (2 セル当り、横の FD の周期と

あわせる為)

$$\sigma^\ell = 2 \cos^{-1} \left(\cos \sigma_0^\ell + \frac{15 I \lambda^3}{W_0 a b^2} \right)$$

横方向の位相進み

$$\sigma^1 = \cos^{-1} \left(\cos \sigma_0^1 + \frac{30 I \lambda^3}{W_0} \frac{3b-a}{a^2 b^2} \right)$$

横方向の zero-current 位相進み (FODO)

正確な表現は

$$\cos \sigma = \cos \theta \cosh \theta + \frac{L}{\ell} \theta (\cos \theta \sinh \theta - \sin \theta \cosh \theta)$$

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{L}{\ell} \right)^2 \theta^2 \sin \theta \sinh \theta$$

上式の L は二つの磁石の間のドリフトスペース

上式の ℓ は磁石長さを表す。

$$\theta = \kappa^{1/2} \ell$$

$$\kappa = \frac{q}{mc^2} \frac{cB'}{\beta_0 \gamma_0}$$

$\theta \ll \frac{\pi}{2}$ の近似式

$$\cos \sigma = 1 - \frac{\theta^4}{6} \left[1 + 4 \frac{L}{\ell} + 3 \left(\frac{L}{\ell} \right)^2 \right] \quad (A)$$

$\theta \ll \frac{\pi}{2}$ かつ $\frac{L}{\ell} \gg 1$ の近似式

$$\cos \sigma = 1 - \frac{1}{2} \theta^4 \left(\frac{L}{\ell} \right)^2 = 1 - \frac{\kappa^2 \ell^2 L^2}{2} \quad (B)$$

かなり正確な近似式 (高周波発散力を含む表式、参考文献 5)

$$\sigma_0^1 = \cos^{-1} \left[1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{\Lambda}{3} \right) \Lambda^2 \theta_0^4 - 2\Delta \right] \quad (C)$$

$$\text{逆に } \theta_0^2 = \left[\frac{1 - \cos \sigma_0^1 - 2\Delta}{\Lambda^2 (1/2 - \Lambda/3)} \right]^{1/2}$$

$$\Lambda = \frac{\ell}{L}$$

$$\Delta = -k_{i,rf}^2 L^2 \quad (3-2-2 \text{ 参照})$$

$L = \beta\lambda$, ℓ は磁石長さ

$$\psi = \sqrt{\frac{\beta_{max}}{\beta_{min}}} = \frac{1 + \left(1 - \frac{\Lambda}{2}\right) \frac{\Lambda}{2} \theta_0^2 - \frac{\Delta}{2}}{\cos \frac{\sigma_0^1}{2}}$$

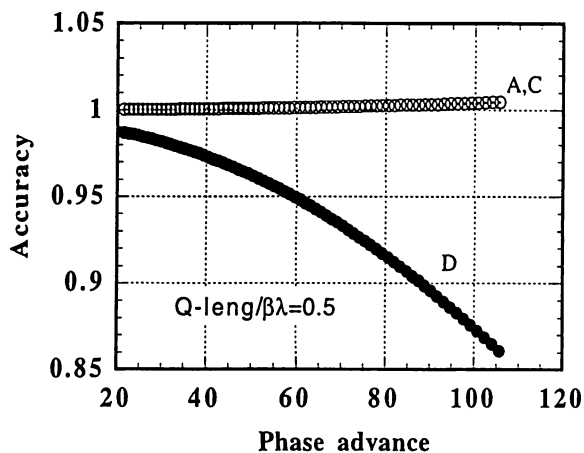


図 3-6 横の位相進みの近似式の結果を正確な値で規格化して表示。式 A, C, D を使った。式 B は約 60% の値となる。Q-mag length/cell length = 0.5。

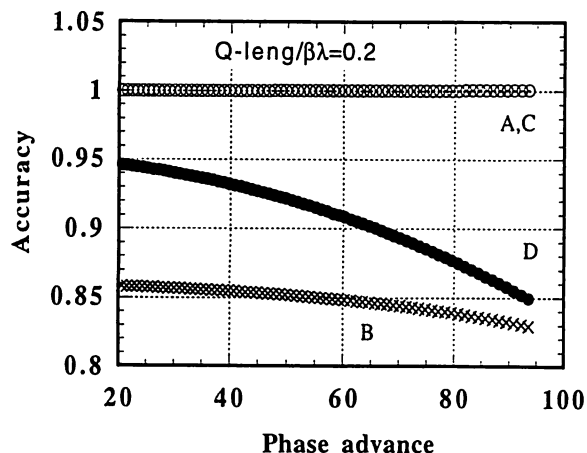


図 3-7 横の位相進みの近似式の結果を正確な値で規格化して表示。式 A, B, C, D を使った。Q-mag length/cell length = 0.2。

ここの β は β -function を表す。

Δ に空間電荷効果を含める事も出来る。

$$\Delta = -(k_{t,rf}^2 + \mu_t k_t^2) L^2$$

これを使うと前ページの σ^1 と一致する。

やや低めの評価となる近似式 (参考文献 6)

$$\sigma^2 = \frac{\theta_0^4}{8\pi^2} + \Delta_{rf} + \Delta_{sc} \quad (D)$$

$$\theta_0^2 = \frac{q}{mc^2} \frac{cB'}{\beta_0 \gamma_0} \chi L_w^2$$

$$L_w = N\beta\lambda \quad (N=2 \text{ for FODO})$$

$$\chi = \frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi\Lambda}{2}$$

$$\Delta_{rf} = -k_{t,rf}^2 L_w^2$$

$$\Delta_{sc} = -\mu_t k_t^2 L_w^2 = -\frac{3Z_0}{2\pi} \frac{q}{mc^2} \frac{I\lambda^3(1-M_z)}{\gamma^3 a^2 z_m}$$

四極磁石の勾配

$$B' = \frac{mc\beta\gamma\theta_0^2}{qL^2} = \frac{W_0\gamma\theta_0^2}{c\beta\lambda^2}$$

縦横の space-charge parameter

$$\mu_\ell = 1 - \left(\frac{\sigma^\ell}{\sigma_0^\ell} \right)^2$$

$$\mu_t = 1 - \left(\frac{\sigma^t}{\sigma_0^t} \right)^2$$

$$\sigma = kL_f \quad (L_f = 2\beta\lambda \text{ for normal DTL})$$

$$\varepsilon_\ell = \frac{\sigma^\ell z_m^2}{N\beta\lambda}$$

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma^t a^2}{N\beta\lambda}$$

$$r_c = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2} = 1.535 \times 10^{-18}$$

$$K = \frac{1}{I_0} \frac{2}{\beta^3 \gamma^3}$$

$$I_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0 mc^3}{q} \approx \frac{1}{30} \frac{mc^2}{q} \approx 31 \text{ MA}$$

第4章 Emittance equation

この章に関連して古くより多くの実験事実があり、多くの考察と計算機シミュレーションが行なわれてきた。エミッタンスの増加を、ビームの内部エネルギーの変化と関連させた理論はWanglerらにより、軸対称連続ビームの場合に考察された(参考文献10)。3次元バンチビームへの拡張はHofmann and Struckmeierによりなされた(参考文献7)。本章は、参考文献7、11、12をほぼ忠実に追ったものであり、筆者の昔の(既にワープロ化されていた)ノートを整形して転載したので、筆者が補助用に加えたメモもそのままの形で含まれている。更に興味がある方は原論文を参照していただきたい。

§4-1 運動方程式

$$\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v} = m\gamma\beta c \quad (4-1-1)$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma\beta) = \gamma^3 \frac{d\beta}{dt}, \quad \frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3\beta \frac{d\beta}{dt}, \quad s = vt, \quad \frac{d}{dt} = v \frac{d}{ds}$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (4-1-2)$$

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r} + q\mathbf{E} \quad (4-1-3)$$

第1項は線形と仮定した外力、第2項は空間電荷力(磁場も含む)を表す。(2)(3)より、

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{1}{m\gamma v^2} \mathbf{F} = \frac{-k}{m\gamma v^2} \mathbf{r} + \frac{q\mathbf{E}}{m\gamma v^2} = -K\mathbf{r} + \frac{q\mathbf{E}_e}{m\gamma^3 v^2} \quad (4-1-4)$$

成分に分けると、

$$x'' + K_x(s)x - \frac{q}{m\gamma^3 v^2} E_x(x, y, z, s) = 0 \quad (4-1-5)$$

$$y'' + K_y(s)y - \frac{q}{m\gamma^3 v^2} E_y(x, y, z, s) = 0 \quad (4-1-6)$$

$$z'' + K_z(s)z - \frac{q}{m\gamma^3 v^2} E_z(x, y, z, s) = 0 \quad (4-1-7)$$

空間電荷効果による電場はPoisson's equationから得られる。

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_e = \frac{q}{\epsilon_0} n(x, y, z, s) \quad (4-1-8)$$

ここで、粒子密度 $n(x, y, z, s)$ は分布関数を積分すれば得られ、

$$n(x, y, z, s) = \iiint f(x, y, z, x', y', z', s) dx' dy' dz' \quad (4-1-9)$$

この f はVlasov's equationに従うものとする。

$$\frac{\partial f}{\partial s} + (\mathbf{x}' \cdot \nabla) f - \left(\mathbf{k} - \frac{q}{m\gamma^3 v^2} \mathbf{E} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} f = 0 \quad (4-1-10)$$

Vlasov's equation

分布関数 $f(v, r, t)$ を微分すれば、

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} = & \left(\frac{\partial f}{\partial v_x} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v_y} \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v_z} \frac{\partial v_z}{\partial t} \right) \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned} \quad (4-1-11)$$

右辺第1項は加速度を \mathbf{a} とすれば $\mathbf{a} \cdot (\nabla_v f)$ 、第2項は $\mathbf{v} \cdot (\nabla_r f)$ と書けるので、

$$\frac{df}{dt} = \mathbf{a} \cdot (\nabla_v f) + \mathbf{v} \cdot (\nabla_r f) + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (4-1-12)$$

これを Boltzmann's equation と呼ぶ。collision less の時には、右辺をゼロとおけばVlasov's equation が得られる。

$$\mathbf{a} \cdot (\nabla_v f) + \mathbf{v} \cdot (\nabla_r f) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (4-1-13)$$

$s=vt$ を使って変数を変え、(4) を使って(10) を得

る。

§ 4-2 Emittance equation の導出

2次モーメントは次式で定義される。Nは全粒子数。

$$\overline{x^2} = \frac{1}{N} \int x^2 f dx dy dz' dy' dz' \quad (4-2-1)$$

$$\overline{xx'} = \frac{1}{N} \int xx' f dx \dots dz' \quad (4-2-2)$$

§ 2-3 (2-3-11) を書き直すと

$$\frac{d}{ds} \overline{x^2} - 2 \overline{xx'} = 0 \quad (4-2-3)$$

$\overline{xx'}$ を s で微分して § 4-1 (4-1-5) を用いると

$$\frac{d}{ds} \overline{xx'} - \overline{x'^2} + K_x \overline{x^2} - \frac{q}{m\gamma^3 v^2} \overline{x E_x} = 0 \quad (4-2-4)$$

$\overline{x'^2}$ を s で微分して(4-1-5) を用いると

$$\frac{d}{ds} \overline{x'^2} + 2K_x \overline{xx'} - \frac{q}{m\gamma^3 v^2} \overline{x' E_x} = 0 \quad (4-2-5)$$

これらの式は y, z に関しても同様に導かれる。

rms emittance を次式で定義する。

$$\epsilon_x = 4 \sqrt{\overline{x^2} \overline{x'^2} - \overline{xx'}^2} \quad (4-2-6)$$

前述の定義 § 2-3 (2-3-14) と比べて、 p の代わりに x' を使用している事に注意する。粒子のエネルギーが変化する場合には、(2-3-14) の定義は保存量となっている事を示す事が出来るので、これは normalized emittance (規格化エミッタンス) と呼ばれる。正しくは(4-2-6)のエミッタンスに $\beta\gamma$ を掛けた量を言う。エミッタンスに関しては、その定義が色々あるので、議論の前には必ず定義を明らかにする事が必要となる。(4-2-3) より

$$\overline{xx'} = XX' \quad (4-2-7)$$

上式を微分すれば

$$(X')^2 + XX'' - \frac{d}{ds} (\overline{xx'}) = 0 \quad (4-2-8)$$

(4-2-4, 6, 7, 8) より、rms envelope equation が導かれる。

$$\frac{d^2}{ds^2} X + K_x(s)X - \frac{\epsilon_x^2(s)}{16X^3} - \frac{q}{m\gamma^3 v^2} \frac{\overline{x E_x}}{X} = 0 \quad (4-2-9)$$

y, z に関しても同様である。上式は未知の関数である $\epsilon_x^2(s)$ を含んでいるが、この微分は(4-2-6) からわかる。

(4-2-6) を2乗してから s で微分すれば

$$\frac{d\epsilon_x^2}{ds} = 32 \left(\overline{x^2} \overline{x' x''} - \overline{xx'} \overline{xx''} \right) \quad (4-2-10)$$

ここで x'' は式(4-1-5)により表される。(4-1-5)式では既に外力は線形と仮定されている事に注意する。この場合には、外力を含む平均はゼロとなるので、

$$\frac{d\epsilon_x^2}{ds} = \frac{32q}{m\gamma^3 v^2} \left(\overline{x^2} \overline{x' E_x} - \overline{xx'} \overline{x E_x} \right) \quad (4-2-11)$$

$$\frac{d\epsilon_y^2}{ds} = \frac{32q}{m\gamma^3 v^2} \left(\overline{y^2} \overline{y' E_y} - \overline{yy'} \overline{y E_y} \right) \quad (4-2-12)$$

$$\frac{d\epsilon_z^2}{ds} = \frac{32q}{m\gamma^3 v^2} \left(\overline{z^2} \overline{z' E_z} - \overline{zz'} \overline{z E_z} \right) \quad (4-2-13)$$

次に E を含む項を物理的に見通しの良い量で置き換える。即ち、電場のエネルギー (field energy) におきかえよう。まず以下の諸量を求めておく。

$$\overline{x' E_x} = \frac{1}{N} \int x' E_x f dx \dots dz' = \frac{1}{N} \iiint E_x n \overline{v_x} dx dy dz \quad (4-2-14)$$

$$n \overline{v_x} = \iiint x' f dx' dy' dz' \quad (4-2-15)$$

$\overline{v_x}$ は速度 v の系 (laboratory frame) 上の局所的な平均速度を表し、 $v_x = \frac{dx}{ds}$ である。局所的な電流は

次式で定義される。

$$\mathbf{j} = qn\mathbf{v} \quad (4-2-16)$$

(4-2-14)(4-2-16) より

$$\overline{x'E_x} = \frac{1}{Nqv} \iiint E_x j_x dx dy dz \quad (4-2-17)$$

y, z についても同様に

$$\overline{y'E_y} = \frac{1}{Nqv} \iiint E_y j_y dx dy dz \quad (4-2-18)$$

$$\overline{z'E_z} = \frac{1}{Nqv} \iiint E_z j_z dx dy dz \quad (4-2-19)$$

次に § 4-1 (4-1-10) を積分すれば連続の方程式が得られる。

$$\frac{\partial n}{\partial s} + \frac{1}{qv} \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (4-2-20)$$

上式を得る為には、§ 4-1 (4-1-10) を速度空間で積分すれば、第 1 項より

$$\int \frac{\partial f}{\partial s} dx' dy' dz' = \frac{\partial}{\partial s} \int f dx' dy' dz' = \frac{\partial n}{\partial s} \quad (4-2-21)$$

第 2 項より、ベクトル公式、

$\nabla_r \cdot (fv) = f\nabla_r \cdot v + v \cdot (\nabla_r f)$ と $\nabla_r \cdot v = 0$ を用いると、

$$\int v \cdot (\nabla_r f) dV' = \int \nabla_r \cdot (fv) dV' = \nabla_r \cdot \int f v dV' \\ = n \nabla_r \cdot \bar{v} = \frac{1}{qv} \nabla_r \cdot \mathbf{j} \quad (4-2-22)$$

$$(dV' = dx' dy' dz')$$

第 3 項は

$$\nabla_v \cdot (fa) = f\nabla_v \cdot a + a \cdot (\nabla_v f) = a \cdot (\nabla_v f) \quad (4-2-23)$$

なので、Gauss の定理を用いると

$$\int a \cdot (\nabla_v f) dV' = \int \nabla_v \cdot (fa) dV' = \int (fa)_n da \quad (4-2-24)$$

この面積積分は、v を大きく選べば $f = 0$ となるの

で、ゼロとなる。

(20) より、 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ だから

$$\iiint \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dx dy dz = \iiint \phi \nabla \cdot \mathbf{j} dx dy dz \\ = -qv \iiint \phi \frac{\partial n}{\partial s} dx dy dz \quad (4-2-25)$$

$$\text{ベクトル公式より } \nabla \cdot (\phi \mathbf{j}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{j} + \mathbf{j} \cdot (\nabla \phi)$$

$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = \phi \nabla \cdot \mathbf{j} - \nabla \cdot (\phi \mathbf{j})$ であるが、右辺第 2 項の体積積分を面積分になおすと、ゼロである事がわかる。

そこで、(4-2-20) と Poisson's equation § 4-1 (4-1-8) を使えば、

$$\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV = -qv \int \phi \frac{\partial n}{\partial s} dV = -\epsilon_0 v \int \phi \frac{\partial}{\partial s} (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV \\ = \epsilon_0 v \int \left(\nabla \cdot \left(\phi \nabla \frac{\partial \phi}{\partial s} \right) - \nabla \phi \cdot \left(\nabla \frac{\partial \phi}{\partial s} \right) \right) dV$$

この積分はビームの内部体積 V にて行なう。体積積分を面積分になおすと

$$= \epsilon_0 v \int_S \left(\phi \nabla \frac{\partial \phi}{\partial s} \right)_n da - \epsilon_0 v \int \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial s} dV \quad (4-2-26)$$

これより次式を得る。

$$\iiint \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dx dy dz = -v \frac{d}{ds} W - \epsilon_0 v \int_S \phi \frac{\partial}{\partial s} E_n da \quad (4-2-27)$$

ここで

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_V E^2 dx dy dz \quad (4-2-28)$$

W は体積 V の内部の field energy である。

(4-2-17)(4-2-18)(4-2-19)(4-2-27) より

$$\overline{x'E_x} + \overline{y'E_y} + \overline{z'E_z} = -\frac{1}{Nq} \frac{dW}{ds} - \frac{\epsilon_0}{Nq} \iint_S \phi \frac{\partial}{\partial s} E_n da \quad (4-2-29)$$

(4-2-11)(4-2-12)(4-2-13) を $\overline{x^2}$, $\overline{y^2}$, $\overline{z^2}$ で割ってから

加えて、(4-2-29) と $\overline{xx'} = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \overline{x^2}$ である事を使えば

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\overline{x^2}} \frac{d\overline{x^2}}{ds} + \frac{1}{\overline{y^2}} \frac{d\overline{y^2}}{ds} + \frac{1}{\overline{z^2}} \frac{d\overline{z^2}}{ds} \\ &= \frac{32q}{m\gamma^3 v^2} \left[-\frac{1}{Nq} \frac{dW}{ds} - \frac{\epsilon_0}{Nq} \iint_S \phi \frac{\partial}{\partial s} E_n da \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\overline{x^2}} \frac{d\overline{x^2}}{ds} \overline{x'E_x} + \frac{1}{\overline{y^2}} \frac{d\overline{y^2}}{ds} \overline{y'E_y} + \frac{1}{\overline{z^2}} \frac{d\overline{z^2}}{ds} \overline{z'E_z} \right) \right] \quad (4-2-30) \end{aligned}$$

上式は、3次元のエミッタンスの変化と field energy の変化を関連させており、これまでの所では近似を用いていない。上式を基礎にして次節では、取り扱う次元ごとに右辺を計算してエミッタンス方程式を導く。

最後にエネルギーの関係式を導いておこう。(4-2-5)をx, y, zについて加えて、(4-2-17)(4-2-18)(4-2-19)と(4-2-27)を用いると

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} (\overline{x'^2} + \overline{y'^2} + \overline{z'^2}) \\ & + \left[k_x(s) \frac{d\overline{x^2}}{ds} + k_y(s) \frac{d\overline{y^2}}{ds} + k_z(s) \frac{d\overline{z^2}}{ds} \right] \\ & + \frac{2}{m\gamma^3 v^2 N} \left(\frac{dW}{ds} + \epsilon_0 \iint_S \phi \frac{\partial}{\partial s} E_n da \right) = 0 \quad (4-2-31) \end{aligned}$$

収束力が一定の場合には、上式は全エネルギーの保存則と解釈出来る。即ち、sについての微分の中を定数とおくと、

$$T + V_{ex} + \frac{1}{\gamma^2 N} W = \text{const.} \quad (4-2-32)$$

$$T = \frac{m\gamma v^2}{2} (\overline{x'^2} + \overline{y'^2} + \overline{z'^2}) \quad (4-2-33)$$

$$V_{ex} = \frac{m\gamma v^2}{2} (k_x \overline{x^2} + k_y \overline{y^2} + k_z \overline{z^2}) \quad (4-2-34)$$

ここで、T は beam frame における運動エネルギー、 V_{ex} は外からの収束力によるポテンシャルエネルギーを表す。境界の表面積分の項は、境界が充分離れており、電場の法線成分の微分がゼロになるとして無視する。

§ 4-3 Emittance equation

式(4-2-30)の右辺第3項を評価する必要がある。その為には、電荷分布(バンチ)による場のエネルギーを計算しなければいけない。

3 - D Equation

一様で回転対称なバンチを考える。x, y 方向(横方向)の半径を a, z 方向を c とすれば、適当に大きな半径 R の球内の field energy (参考文献7)は

$$W_u = \frac{N^2 q^2}{40\pi\epsilon_0} \left[\frac{6}{c} \left(1 - f + \frac{c^2}{a^2} f \right) - \frac{5}{R} \right] \quad (4-3-1)$$

ここで $f(c/a)$ は形状因子であり、 $a=c$ の時は1/3となる。上式を微分すれば

$$\frac{dW_u}{ds} = -\frac{3N^2 q^2}{20\pi\epsilon_0} \left(\frac{dc}{ds} \frac{f}{a^2} + \frac{da}{ds} \frac{1-f}{ac} \right) \quad (4-3-2)$$

次に(4-2-30)の右辺第3項を評価する為に

$$1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\overline{x^2}} \frac{d\overline{x^2}}{ds} \overline{x'E_x} + \frac{1}{\overline{y^2}} \frac{d\overline{y^2}}{ds} \overline{y'E_y} + \frac{1}{\overline{z^2}} \frac{d\overline{z^2}}{ds} \overline{z'E_z} \right) \quad (4-3-3)$$

とおく。一様に分布している場合には、全体とし

てエミッタンスの増減がないとして、

$$I_u = -\frac{1}{Nq} \frac{dW_u}{ds} \quad (4-3-4)$$

一様でない一般的な分布の場合には、 $\overline{xE_x}$ 等は、バンチの rms の大きさが同じならば、電荷の分布には大きく依存しない事が示されている。電荷密度分布を次式の形と仮定する。

$$n(x, y, z, s) = n\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, s\right) \quad (4-3-5)$$

この時、次式を得る（参考文献 2）。

$$\overline{xE_x} = \overline{yE_y} = \frac{3Nq}{20\sqrt{5}\pi\epsilon_0 Z} \frac{1-f}{2} \lambda_3 \quad (4-3-6)$$

$$\overline{zE_z} = \frac{3Nq}{20\sqrt{5}\pi\epsilon_0 Z} \frac{Z^2}{X^2} f \lambda_3 \quad (4-3-7)$$

ここで、 $X = \sqrt{x^2}$ は rms 半径である。Y, Z も同様の定義である。 λ_3 は (4-3-5) の分布に依存する量であり、次の値となる。

| λ_3 | 分布 |
|---|-----------|
| 1 | uniform |
| $\frac{25\sqrt{5}}{21\sqrt{7}} \approx 1.006$ | parabolic |
| $\frac{5\sqrt{5}}{6\sqrt{\pi}} \approx 1.051$ | Gaussian |
| $\frac{25}{8\sqrt{3}\pi} \approx 1.018$ | hollow |

従って一般に

$$I = -\frac{1}{Nq} \lambda_3 \frac{dW_u}{ds} \quad (4-3-8)$$

(4-3-8) を使って、(4-2-30) を書き直すと

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x^2} \frac{d\epsilon_x^2}{ds} + \frac{1}{y^2} \frac{d\epsilon_y^2}{ds} + \frac{1}{z^2} \frac{d\epsilon_z^2}{ds} \\ &= -\frac{32}{m\gamma^3 v^2 N} \left(\frac{dW}{ds} - \lambda_3 \frac{dW_u}{ds} \right) \end{aligned} \quad (4-3-9)$$

ここで、W の積分は充分大きな体積で行なうの

で、(4-2-30) の表面積分の寄与はゼロとなる。

上式はエミッタンスの変化を表す一般的な式であり、次の特徴を持つ。

- 1) 一様分布の場合には右辺はゼロとなる。その他の場合には、field energy の一様分布からの差分がエミッタンス増加の原因となる事を示している。
- 2) 左辺は重み付きのエミッタンスの変化である。
- 3) equipartitioning が成立するときには、各自由度の間の emittance transfer が予測出来る。
- 4) 別の原因による field energy の増加があれば、それらによるエミッタンス増加への寄与を計算出来る。
- 5) エミッタンス増加を予測するには、field energy を計算すればよく、エミッタンスの時間変化を知る必要はない。

(4-3-9) は rms beam size を含むので、rms envelope equation と対になる。そこで次に、envelope equation (4-2-9) と (4-3-6)(4-3-7) より

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{ds^2} X + K_x(s)X - \frac{\epsilon_x^2(s)}{16X^3} \\ & - \frac{Nq^2}{20\sqrt{5}\pi\epsilon_0 m\gamma^3 v^2 XZ} h_x\left(\frac{Z}{X}\right) = 0 \end{aligned} \quad (4-3-10)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{ds^2} Z + K_z(s)Z - \frac{\epsilon_z^2(s)}{16Z^3} \\ & - \frac{Nq^2}{20\sqrt{5}\pi\epsilon_0 m\gamma^3 v^2 ZX} h_z\left(\frac{Z}{X}\right) = 0 \end{aligned} \quad (4-3-11)$$

ここで、 $X = \sqrt{x^2}$ ($=a/\sqrt{5}$ for uniform ellipsoid),
 $Z = \sqrt{z^2}$ ($=c/\sqrt{5}$ for uniform ellipsoid)であり、

$$h_x\left(\frac{Z}{X}\right) = \frac{3}{2}\left[1 - f\left(\frac{Z}{X}\right)\right]\lambda_3 \quad (4-3-12)$$

$$h_z\left(\frac{Z}{X}\right) = 3\frac{Z}{X}f\left(\frac{Z}{X}\right)\lambda_3 \quad (4-3-13)$$

球対称バンチの時は

$$f = 1/3, \quad h_x = h_z = \lambda_3 \equiv 1 \quad (4-3-14)$$

nearly spherical bunchの時は

$$f \equiv \frac{1}{3}\frac{X}{Z} \quad (4-3-15)$$

$$h_x \equiv 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{X}{Z}\right) \quad (4-3-16)$$

$$h_z \equiv 1 \quad (4-3-17)$$

2 - D Equation

断面が楕円 (a, b) 一様分布する 2 次元の continuous beam の適当に大きな半径 R の円柱内の field energy は

$$W_u = \frac{N^2 q^2}{16\pi\epsilon_0} \left(1 + 4\ell n \frac{2R}{a+b}\right) \quad (4-3-18)$$

これより

$$\frac{dW_u}{ds} = -4w_0 \frac{d}{ds} \frac{(a+b)}{a+b} \quad (4-3-19)$$

$$w_0 = \frac{N^2 q^2}{16\pi\epsilon_0} \quad (4-3-20)$$

一様分布の時は、(4-3-4) に対応して次式を得る。

$$I_u = -\frac{1}{Nq} \frac{dW_u}{ds} \quad (4-3-21)$$

一様分布でない時、3次元の場合との違いは、2次元では、 $\overline{xE_x}$, $\overline{yE_y}$ が密度分布の形に依存しない事である (参考文献 2)。但し、次の楕円対称な密度を仮定する。

$$n(x, y, s) = n \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, s \right) \quad (4-3-22)$$

従って、 $I = I_u$ となり、(4-3-9) に対応して

$$\frac{1}{x^2} \frac{d\epsilon_x^2}{ds} + \frac{1}{y^2} \frac{d\epsilon_y^2}{ds} = -\frac{32}{m\gamma^3 v^2 N} \left(\frac{dW}{ds} - \frac{dW_u}{ds} \right) \quad (4-3-23)$$

が得られる。w₀ を使って書き直すと

$$\frac{1}{x^2} \frac{d\epsilon_x^2}{ds} + \frac{1}{y^2} \frac{d\epsilon_y^2}{ds} = -4K \frac{d}{ds} \frac{W - W_u}{w_0} \quad (4-3-24)$$

$$K = \frac{Nq^2}{2\pi\epsilon_0 m\gamma^3 v^2} \quad (\text{generalized perveance}) \quad (4-3-25)$$

この K は §4-4 の K₂ より factor 4 大きいので注意せよ。特に円筒ビームでは

$$\frac{d\epsilon_x^2}{ds} = -2 K x^2 \frac{d}{ds} \frac{W - W_u}{w_0} \quad (4-3-26)$$

envelope equation は

$$\frac{d^2}{ds^2} X + K_x(s)X - \frac{\epsilon_x^2(s)}{16X^3} - \frac{K}{2} \frac{1}{X+Y} = 0 \quad (4-3-27)$$

$$\frac{d^2}{ds^2} Y + K_y(s)Y - \frac{\epsilon_y^2(s)}{16Y^3} - \frac{K}{2} \frac{1}{X+Y} = 0 \quad (4-3-28)$$

比較の為に equivalent uniform beam size を変数とした時の envelope equation を書いておくと、

$$\frac{d^2}{ds^2} X + K_0^2 X - \frac{\epsilon^2}{X^3} - \frac{2K}{X+Y} = 0 \quad (4-3-29)$$

但し、この式の X, Y は (4-3-27)(4-3-28) の X, Y の 2 倍で定義され、エミッタンスは 4 倍となっている。又、要すれば、K_x を K_{0x}² で置き換える等を行なう。

1 - D Equation

x - y 平面上では無限に広がり、|z| ≤ c に一様に分布するシートを考える。|z| ≤ L の単位面積内の field energy は、粒子数を N として、

$$W_u = \frac{N^2 q^2}{\epsilon_0} \left(\frac{L}{4} - \frac{c}{6} \right) \quad (4-3-30)$$

微分すれば

$$\frac{dW_u}{ds} = -\frac{N^2 q^2}{6\epsilon_0} \frac{dc}{ds} = -Nq I_u \quad (4-3-31)$$

又

$$\overline{zE_z} = \frac{Nq}{2\sqrt{3}\epsilon_0} Z \lambda_1 \quad (4-3-32)$$

λ_1 は電荷分布に依存する量であり以下の値となる。

| λ_1 | 分布 |
|-------------|-----------|
| 1 | uniform |
| 0.996 | parabolic |
| 0.977 | Gaussian |
| 0.987 | hollow |

従って

$$I = -\frac{1}{Nq} \lambda_1 \frac{dW_u}{ds} \quad (4-3-33)$$

(4-2-30) より 1 次元の emittance equation は

$$\frac{1}{z^2} \frac{d\epsilon_z^2}{ds} = -\frac{32}{m\gamma^3 v^2 N} \left(\frac{dW}{ds} - \lambda_1 \frac{dW_u}{ds} \right) \quad (4-3-34)$$

envelope equation は

$$\frac{d^2}{ds^2} Z + K_z(s)Z - \frac{\epsilon_z^2(s)}{16Z^3} - K \frac{\pi}{\sqrt{3}} \lambda_1 = 0 \quad (4-3-35)$$

§ 4-4 電荷再分布によるエミッタンス増加

emittance change と filed energy との関係は § 4-3 (4-3-9) で表されるので、ここに再述しておく。

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} \frac{d\epsilon_x^2}{ds} + \frac{1}{y^2} \frac{d\epsilon_y^2}{ds} + \frac{1}{z^2} \frac{d\epsilon_z^2}{ds} \\ = -\frac{32}{m\gamma^3 v^2 N} \left(\frac{dW}{ds} - \lambda_3 \frac{dW_u}{ds} \right) \end{aligned} \quad (4-4-1)$$

ここで以下の仮定をする。

- 1) z 方向へ速度 v で動く。
- 2) 線形な外力と、空間電荷力を仮定して、各自由度において同形とする。
- 3) 対称な速度分布。
- 4) 初期の粒子密度分布は一様ではないとして、それが一様な分布に進化すると考える。
- 5) それぞれの自由度における rms 半径と、エミッタンスは等しい。

この時、(4-4-1) は次のように書き直せる。

$$\frac{d\epsilon^2}{ds} = -\frac{32}{n} \frac{a^2}{m\gamma^3 v^2 N} \frac{dU}{ds} \quad (4-4-2)$$

ここで、 $U = W - W_u$ は non-linear field energy、 n は、取り扱う問題の次元を表しており、球対称バンチ ($n=3$)、円形連続ビーム ($n=2$)、sheet beam ($n=1$) とする。 N は粒子数であり、バンチ内 ($n=3$)、単位長さ内 ($n=2$)、単位面積内 ($n=1$) とする。 a は rms beam size である。envelope equation は

$$\frac{d^2 a}{ds^2} + K_0^2 a - \frac{\epsilon^2}{16a^3} - \frac{K_n}{a^{n-1}} = 0 \quad (4-4-3)$$

K_0 は外力を表す。 K_n は空間電荷の効果を表しており、その次数に従って、表 4-1 にまとめてある。係数の 16 は ϵ と a の定義に由来する。

rms matched beam を考える。この意味は rms size が変化しない事であり、

$$\frac{d^2 a}{ds^2} = 0 \quad (4-4-4)$$

となる。(3)(4) より

$$K_n = a^n \left(K_0^2 - \frac{\epsilon^2}{16a^4} \right) \quad (4-4-5)$$

空間電荷効果が無い時、即ち $K_n = 0$ の時のビーム半径は

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{K_0}} \quad (4-4-6)$$

逆に、space-charge limit では、ビームサイズに対するエミッタンスの寄与がゼロとなり、(4-4-5) より

$$a^n = \frac{K_n}{K_0^2} \quad (4-4-7)$$

この場合のビームサイズは、空間電荷力と外部からの収束力の比で決まる事がわかる。

§ 3-4 の方法に従って等価な一様分布ビームの単粒子の運動方程式を (3) より書き直すと

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \left(K_0^2 - \frac{K_n}{a^n} \right) x = 0 \quad (4-4-8)$$

これより、空間電荷効果を含む時の波数 K は次式で表される事がわかる。

$$K_i^2 = K_0^2 - \frac{K_n}{a^n} \quad (4-4-9)$$

ここで K_n と W_n を表 4-1 にまとめておく。

表 4-1 Space-charge parameters K_n and field energy normalization parameters w_n .

| n | K_n | w_n |
|---|---|---|
| 1 | $\frac{Nq^2}{2\sqrt{3} \epsilon_0 m \gamma^3 v^2}$ | $\frac{N^2 q^2 a}{4\sqrt{3} \epsilon_0}$ |
| 2 | $\frac{Nq^2}{8\pi \epsilon_0 m \gamma^3 v^2}$ | $\frac{N^2 q^2}{16\pi \epsilon_0}$ |
| 3 | $\frac{Nq^2}{20\sqrt{5} \pi \epsilon_0 m \gamma^3 v^2}$ | $\frac{N^2 q^2}{40\sqrt{5} \pi \epsilon_0 a}$ |

表 4-1 を使うと、(2) が書き直せて、

$$\frac{d\epsilon^2}{ds} = -\frac{16 a^{4-n} K_n}{n w_n} \frac{dU}{ds} \quad (4-4-10)$$

上式を次の仮定、rms beam size a は一定、即ちエミッタンスに依存しない、のもとで積分する。この仮定は space-charge limit に近いビームでは正しい。これは、rms matched beam である事を意味している。平均速度は変化しないとして、(10) より

$$\epsilon_f^2 - \epsilon_i^2 = -\frac{16 a^{4-n} K_n}{n w_n} (U_f - U_i) \quad (4-4-11)$$

(3) より

$$K_0^2 a - \frac{\epsilon^2}{16a^3} - \frac{K_n}{a^{n-1}} = 0 \quad (4-4-12)$$

(9) より

$$K_i^2 = K_0^2 - \frac{K_n}{a^n} \quad (4-4-13)$$

ここで、添え字の i, f は始状態と終状態をあらわす。(11)(12)(13) より

$$\frac{\epsilon_f}{\epsilon_i} = \left[1 - \frac{1}{n} \frac{U_f - U_i}{w_n} \left(\frac{K_0^2}{K_i^2} - 1 \right) \right]^{1/2} \quad (4-4-14)$$

表 4-2 に $(U_f - U_i)/w_n$ の値をまとめてある。

表 4-2 The quantity U/w_n for some common spatial distributions.

| Profile | Uniform | Parabolic | Gaussian |
|---------|---------|---------------|-----------------------|
| | 1 | $1 - x^2/X^2$ | $\exp(-x^2/\sigma^2)$ |
| n | | | |
| 1 | 0 | 0.00818 | 0.0456 |
| 2 | 0 | 0.0224 | 0.154 |
| 3 | 0 | 0.0368 | 0.308 |

space-charge dominated beam で linear focusing system の場合、終状態では $U = 0$ となると仮定すれば、(14) より

$$\frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_i} = \left[1 + \frac{1}{n} \frac{U_i}{w_n} \left(\frac{K_0^2}{K_i^2} - 1 \right) \right]^{1/2}$$

$$= \left[1 + \frac{1}{n^2} \frac{U_i}{w_n} \left(\frac{a}{\lambda_D} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (4-4-15)$$

$$\lambda_D / a = \left[n \left(\frac{K_0^2}{K_i^2} - 1 \right) \right]^{-1/2} \quad (4-4-16)$$

λ_D は Debye length と呼ばれる (§ 3 - 6 参照)。space-charge dominated beam では、(7)(15) と

$$\frac{K_0^2}{K_i^2} - 1 = \frac{16K_n a^{4-n}}{\varepsilon_i^2} \text{ なる関係を使うと}$$

$$(K_0 \varepsilon_f)^2 = (K_0 \varepsilon_i)^2 + \frac{16}{n} \left(\frac{K_n}{K_0^{2-n}} \right)^{4/n} \left(\frac{U_i}{w_n} \right) \quad (4-4-17)$$

これより、 ε_i がゼロに近づくと final emittance は、ある最低値に近づくとわかり、

$$K_0 \varepsilon_{f,\min} = \frac{4}{\sqrt{n}} \left(\frac{K_n}{K_0^{2-n}} \right)^{2/n} \left(\frac{U_i}{w_n} \right)^{1/2} \quad (4-4-18)$$

(18) より次の事が理解される。

- 1) 収束力が強まると (K_0 が大きくなると)、 $\varepsilon_{f,\min}$ は小さくなる。
- 2) ビーム電流が増加すれば (K_n が大きくなると)、 $\varepsilon_{f,\min}$ は大きくなる。
- 3) 初期の電荷分布の一様性が悪い (U_i / w_n が大きい) と、 $\varepsilon_{f,\min}$ は大きくなる。

(18) よりビーム電流と収束力に対する依存性は

$$\varepsilon_{f,\min} \propto K_n^{2/n} K_0^{1-4/n} \quad (4-4-19)$$

従って、具体的には表 4-1 より

$$1\text{-D beam} \propto K_1^2 K_0^{-3} \propto I^2 / K_0^3$$

$$2\text{-D beam} \propto K_2 K_0^{-1} \propto I / K_0$$

$$3\text{-D beam} \propto K_3^{2/3} K_0^{-1/3} \propto I^{2/3} / K_0^{1/3}$$

I はビーム電流を表す。

$$I = Nqv \quad (4-4-20)$$

(14)(15) より、rms emittance growth は、初期の電荷分布と、ビームラインの tune depression とに依存している事がわかる。計算機シミュレーションによれば、この電荷再分布は、プラズマ周期の数周期で達成される速いプロセスであると言われている。

§ 4 - 5 Equipartitioning (2-D beam)

今までの議論では、空間の 3 方向の自由度に関しては、同じエネルギー分布をしていると仮定していた (§ 4-4 (4-4-2) 以下)。実際には、横方向でも、 x と y に関して分布が異なる事が多くある。そこで、3 方向についての、夫々の重心まわりの振動の平均エネルギーを考えて、最終状態においては、3 個のエネルギーが同じになるように、変化すると仮定する (thermal energy transfer process)。

ここでは、結論的に次の条件が満足される事をいう (§ 5-1 参照)。

$$\sigma_x \varepsilon_x = \sigma_y \varepsilon_y = \sigma_z \varepsilon_z \quad (4-5-1)$$

σ は収束の周期当たりの位相進み (phase advance) である。

2-D equation

次にequipartitioningを表すパラメーターとして

$$P = \frac{X'^2}{Y'^2} = \frac{\sqrt{X'^2}}{\sqrt{Y'^2}} \quad (4-5-2)$$

partition parameter Pは、振動の運動エネルギーの比

$$\text{を表しているが、書き直すと } P = \left(\frac{\epsilon_x}{\epsilon_y}\right)^2 \left(\frac{Y}{X}\right)^2 \text{ となる}$$

事から、P=1はequipartitioningを表す事がわかる。以下の二つの仮定のもとに、Pを含むエミッタンスの変化の式を導いてみよう。

1) rms matched beam とする。

この時にはエミッタンスは次式で表される。

$$\begin{aligned} \epsilon_{xi} &= 4XX'_i & \epsilon_{xf} &= 4XX'_f \\ \epsilon_{yi} &= 4YY'_i & \epsilon_{yf} &= 4YY'_f \end{aligned} \quad (4-5-3)$$

2) ビーム半径は一定と仮定する。これは matched beam で、space-charge が強い時には良い近似である。前項では、この仮定を使っている。

初期状態と終状態の partition parameter は

$$P_i = \frac{X_i^2}{Y_i^2}, \quad P_f = \frac{X_f^2}{Y_f^2} \quad (4-5-4)$$

§ 4-3 (4-3-24) を積分すれば

$$\frac{\epsilon_{xf}^2 - \epsilon_{xi}^2}{X^2} + \frac{\epsilon_{yf}^2 - \epsilon_{yi}^2}{Y^2} = -4K(U_{nf} - U_{ni}) \quad (4-5-5)$$

(3)(4)(5) より

$$\frac{\epsilon_{xf}}{\epsilon_{xi}} = \left[1 - \frac{P_i - P_f}{P_i(1+P_f)} - \frac{P_f}{1+P_f} \frac{4KX^2}{\epsilon_{xi}^2} (U_{nf} - U_{ni}) \right]^{1/2} \quad (4-5-6)$$

$$\frac{\epsilon_{yf}}{\epsilon_{yi}} = \left[1 + \frac{P_i - P_f}{1+P_f} - \frac{1}{1+P_f} \frac{4KY^2}{\epsilon_{yi}^2} (U_{nf} - U_{ni}) \right]^{1/2} \quad (4-5-7)$$

$P_i = P_f = 1$ とすれば、上式は (4-4-11) と一致する。

Wangler の元の式 (参考文献 1 2) では、右辺括弧内の因子 4 は X, Y の定義の中に含まれるので、1 となっている (rms 半径の 2 倍の有効半径を X とおいているので)。見通しをよくする為に次の関係式を使う。

$$\frac{4KY^2}{\epsilon_{yi}^2} = G_2(X/Y) \left(\frac{K_{0y}^2}{K_{yi}^2} - 1 \right) \quad (4-5-8)$$

$$\frac{4KX^2}{\epsilon_{xi}^2} = \frac{G_2(X/Y)}{P_i} \left(\frac{K_{0y}^2}{K_{yi}^2} - 1 \right) \quad (4-5-9)$$

$$G_2(X/Y) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{X}{Y} \right) \quad (4-5-10)$$

ここで、 K_{yi} と K_{0y} は、空間電荷効果を含む時とゼロ電流の場合の初期状態のベータatron振動の波数であり、それは、等価的な一様ビーム (the equivalent uniform beam) について計算されるものとする。等価ビームのrms半径は、今までの定義を使うと $2X$ 及び $2Y$ となる。これらの関係式は、rms matched とビーム半径が一定の条件のもとで、初期状態のenvelope eq. (4-3-27)(4-3-28)と

$$\epsilon_{yi} = 4K_{yi}Y_i^2 \text{ を使うと、 } K_{0y}^2 - K_{yi}^2 = \frac{K}{4G_2} \text{ が得られ、}$$

$$\text{ここで } P_i = \frac{K_{xi}^2}{K_{yi}^2} \text{ となる事を考慮すれば得られる。}$$

る。

(8)(9) を使うと、(6)(7) は

$$\begin{aligned} \left(\frac{\epsilon_{xf}}{\epsilon_{xi}} \right)^2 &= 1 - \frac{P_i - P_f}{P_i(1+P_f)} \\ &- \frac{P_f}{P_i(1+P_f)} G_2(X/Y) \left(\frac{K_{0y}^2}{K_{yi}^2} - 1 \right) (U_{nf} - U_{ni}) \end{aligned} \quad (4-5-11)$$

$$\left(\frac{\varepsilon_{yf}}{\varepsilon_{yi}}\right)^2 = 1 + \frac{P_i - P_f}{1 + P_f}$$

$$- \frac{1}{1 + P_f} G_2(X/Y) \left(\frac{K_{0y}^2}{K_{yi}^2} - 1 \right) (U_{nf} - U_{ni}) \quad (4-5-12)$$

終状態の電荷分布が一様で、しかも $P_f = 1$ となる時は、

$$\frac{\varepsilon_{xf}}{\varepsilon_{xi}} = \left[1 - \frac{P_i - 1}{2P_i} + \frac{G_2(X/Y)}{2P_i} \left(\frac{K_{0y}^2}{K_{yi}^2} - 1 \right) U_{ni} \right]^{1/2} \quad (4-5-13)$$

$$\frac{\varepsilon_{yf}}{\varepsilon_{yi}} = \left[1 + \frac{P_i - 1}{2} + \frac{G_2(X/Y)}{2} \left(\frac{K_{0y}^2}{K_{yi}^2} - 1 \right) U_{ni} \right]^{1/2} \quad (4-5-14)$$

space-charge limit の場合の minimum final emittance を以下のように導く事が出来る。その為に envelope equation (4-3-27)(4-3-28) より space-charge limit で、matched beam の場合の関係式を導くと、

$$K_{0x}^2 X - \frac{K}{2} \frac{1}{X + Y} = 0 \quad (4-5-15)$$

$$K_{0y}^2 Y - \frac{K}{2} \frac{1}{X + Y} = 0 \quad (4-5-16)$$

これより

$$X^2 = \frac{K}{2} \frac{(K_{0y}/K_{0x})^2}{K_{0x}^2 + K_{0y}^2} \quad (4-5-17)$$

$$Y^2 = \frac{K}{2} \frac{(K_{0x}/K_{0y})^2}{K_{0x}^2 + K_{0y}^2} \quad (4-5-18)$$

終状態では equipartitioning が実現されると仮定すると、(6)(7)(17)(18) より $P_f = 1$ とおいて、

$$\varepsilon_{xf}^2 = \varepsilon_{xi}^2 \frac{1 + P_i}{2P_i} + \frac{(K_{0y}/K_{0x})^2}{K_{0x}^2 + K_{0y}^2} K^2 U_{ni} \quad (4-5-19)$$

$$\varepsilon_{yf}^2 = \varepsilon_{yi}^2 \frac{1 + P_i}{2} + \frac{(K_{0x}/K_{0y})^2}{K_{0x}^2 + K_{0y}^2} K^2 U_{ni} \quad (4-5-20)$$

extreme space-charge limit では初期エミッタンスをゼロとおくと

$$\varepsilon_{xf, \min} = \frac{K_{0y}/K_{0x}}{\sqrt{K_{0x}^2 + K_{0y}^2}} K \sqrt{U_{ni}} \quad (4-5-21)$$

$$\varepsilon_{yf, \min} = \frac{K_{0x}/K_{0y}}{\sqrt{K_{0x}^2 + K_{0y}^2}} K \sqrt{U_{ni}} \quad (4-5-22)$$

minimum final emittance は、初期状態の non-linear field energy に依存し、 P_i には依存しない事がわかる。又、 K を通じてビーム電流に比例している。

§ 4 - 6 Equipartitioning (3-D beam)

3次元バンチを考える。横方向は、 x, y が対称とすれば、 $\varepsilon_x = \varepsilon_y$ 。 a, b を横と縦の rms 半径とする。前節と同じ仮定とほぼ同じ手順で以下の式が導かれるので、途中を簡略化して記す。

envelope equation は (4-3-10)(4-3-11) に与えられているが、表式を少し換えて再述すれば、

$$\frac{d^2 a}{ds^2} + K_{0y}^2 a - \frac{\varepsilon_y^2}{16a^3} - \frac{K_3 G_y(b/a)}{ab} = 0 \quad (4-6-1)$$

$$\frac{d^2 b}{ds^2} + K_{0z}^2 b - \frac{\varepsilon_z^2}{16b^3} - \frac{K_3 G_z(b/a)}{ab} = 0 \quad (4-6-2)$$

$$G_y = \frac{3}{2} (1 - f) = h_x \quad (4-6-3)$$

$$G_z = 3f \frac{b}{a} = h_z \quad (4-6-4)$$

$\lambda_3 = 1$ としているが、これは、良い近似になってい

る。emittance equation は (4-3-9) より、 (4-6-13)

$$\frac{2}{a^2} \frac{d\epsilon_y^2}{ds} + \frac{1}{b^2} \frac{d\epsilon_z^2}{ds} = -\frac{32}{m\gamma^3 v^2 N} \left(\frac{dW}{ds} - \frac{dW_u}{ds} \right) \quad (4-6-5)$$

上式を積分すれば

$$\frac{2\Delta\epsilon_y^2}{a^2} + \frac{\Delta\epsilon_z^2}{b^2} = -\frac{16K_3}{b} G_0(b/a) \Delta U_n \quad (4-6-6)$$

$$K_3 = \frac{Nq^2}{20\sqrt{5} \pi\epsilon_0 m\gamma^3 v^2} \quad (\text{表4-1より}) \quad (4-6-7)$$

$$G_0(b/a) = (1-f) + f \left(\frac{b}{a} \right)^2 \quad (4-6-8)$$

$$w_3 = \frac{N^2 q^2 G_0(b/a)}{40\sqrt{5} \pi\epsilon_0 b} \quad (4-6-9)$$

$$U_n = \frac{W - W_u}{w_3} \quad (4-6-10)$$

(8) は (4-3-1) の括弧内第1項と同じである。\$U_n\$ は既に表 4 - 2 に与えてあるが、規格化された non-linear field energy である。

2-D beam にならって、partition parameter を定義する。

$$P = \frac{b^2}{a^2} \quad (4-6-11)$$

(4-6-6) より

$$\frac{\epsilon_{zf}}{\epsilon_{zi}} =$$

$$\left[1 - \frac{2}{P_i} \frac{P_i - P_f}{2 + P_f} - \frac{1}{P_i} \frac{P_f}{2 + P_f} G(b/a) \left(\frac{K_{0y}^2}{K_{yi}^2} - 1 \right) (U_{nf} - U_{ni}) \right]^{1/2}$$

(4-6-12)

$$\frac{\epsilon_{yf}}{\epsilon_{yi}} =$$

$$\left[1 + \frac{P_i - P_f}{2 + P_f} - \frac{1}{2 + P_f} G(b/a) \left(\frac{K_{0y}^2}{K_{yi}^2} - 1 \right) (U_{nf} - U_{ni}) \right]^{1/2}$$

$$G(b/a) = \frac{2G_0}{3(1-f)} \quad (4-6-14)$$

\$P_f = 1\$ となるとすれば

$$\frac{\epsilon_{zf}}{\epsilon_{zi}} = \left[1 - \frac{2}{3} \frac{P_i - 1}{P_i} + \frac{G(b/a)}{3P_i} \left(\frac{K_{0y}^2}{K_{yi}^2} - 1 \right) U_{ni} \right]^{1/2} \quad (4-6-15)$$

$$\frac{\epsilon_{yf}}{\epsilon_{yi}} = \left[1 + \frac{P_i - 1}{3} + \frac{G(b/a)}{3} \left(\frac{K_{0y}^2}{K_{yi}^2} - 1 \right) U_{ni} \right]^{1/2} \quad (4-6-16)$$

球対称バンチを使ったシミュレーション結果と上の2式とは一致する。

extreme space-charge limit に近い所で、ビーム分布が一様になり、equipartitioning が実現すれば、

$$\epsilon_{zf}^2 = \epsilon_{zi}^2 \frac{2 + P_i}{3P_i} + \frac{16G_z(b/a)}{3} \left(\frac{K_3^2}{K_{0z}} \right)^{2/3} U_{ni} \quad (4-6-17)$$

$$\epsilon_{yf}^2 = \epsilon_{yi}^2 \frac{2 + P_i}{3} + \frac{16G_y(b/a)}{3} \left(\frac{K_3^2}{K_{0y}} \right)^{2/3} U_{ni} \quad (4-6-18)$$

extreme space-charge limit ではエミッタンスをゼロとすれば

$$\epsilon_{zf, \min} = 4 \left(\frac{G_z}{3} \right)^{1/2} \left(\frac{K_3^2}{K_{0z}} \right)^{1/3} \sqrt{U_{ni}} \quad (4-6-19)$$

$$\epsilon_{yf, \min} = 4 \left(\frac{G_y}{3} \right)^{1/2} \left(\frac{K_3^2}{K_{0y}} \right)^{1/3} \sqrt{U_{ni}} \quad (4-6-20)$$

これまで述べた equipartitioning による energy transfer は、電荷の再分布に比べて遅いプロセスであり、プラズマ周期の数十倍が必要と言われている。

第5章 Equipartitioning と加速過程

§ 5-1 Equipartitioning

先に定義をした縦と横のビーム温度は、加速過程を通じて夫々変化する。これらを同じ温度に保つ必要は必ずしもない。要は、これらの温度を必要に応じてコントロールする事であると考え。一般に熱平衡状態にあるプラズマの温度は等方的であり、従って自由な状態での終状態では、縦と横の温度は等しい。この状態を equipartitioning と呼び、ひとつの目安と考える事が出来る。matched beam を考える。normalized rms emittances と laboratory frame での温度との関係は (2-2-15) (3-3-10) より、

$$\bar{\epsilon}_{nx} = \bar{x} \left(\frac{\gamma_0 k_B T_{\perp}}{mc^2} \right)^{1/2} \quad (5-1-1)$$

$$\bar{\epsilon}_{nz} = \bar{z} \left(\frac{\gamma_0^3 k_B T_{\parallel}}{mc^2} \right)^{1/2} \quad (5-1-2)$$

これより

$$\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} = \gamma_0^2 \frac{\bar{\epsilon}_{nx}^2}{\bar{\epsilon}_{nz}^2} \frac{\bar{z}^2}{\bar{x}^2} = \gamma_0^2 \frac{\bar{\epsilon}_{nx}^2}{\bar{\epsilon}_{nz}^2} \frac{z_m^2}{a^2} \quad (5-1-3)$$

(3-4-42) (3-4-43) (3-3-7) より

$$\epsilon_{nx} = \beta_0 \gamma_0 k_x a^2 \quad (5-1-4)$$

$$\epsilon_{nz} = \beta_0 \gamma_0^3 k_z z_m^2 \quad (5-1-5)$$

(5-1-3) を変形すれば

$$\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} = \frac{k_x \epsilon_{nx}}{k_z \epsilon_{nz}} \quad (5-1-6)$$

equipartitioning は次式で表される。

$$T_{\perp} = T_{\parallel} \quad (5-1-7)$$

従って、(5-1-3) (5-1-6) より

$$\gamma_0 \frac{\epsilon_{nx}}{\epsilon_{nz}} \frac{z_m}{a} = 1 \quad (5-1-8)$$

$$\frac{k_x \epsilon_{nx}}{k_z \epsilon_{nz}} = 1 \quad (5-1-9)$$

(5-1-8) 又は (5-1-9) が equipartitioning の条件である。位相進みと波数の間には (3-4-36) の関係があるので、(5-1-9) を書き換えると

$$\epsilon_{nx} \sigma_x = \epsilon_{nz} \sigma_z \quad (5-1-10)$$

equipartitioning はひとつの有用な指針であるが、温度とエミッタンスとの関係式から明らかなように、温度はエミッタンスの構成要素である運動エネルギー部分を表しているにすぎない。実際、温度が等しいという条件から導かれた equipartitioning の条件 (5-1-8) は、エミッタンスの定義 (2-2-10 など) を考えれば、縦と横の運動エネルギーの広がり等しい事を述べている事がわかる。それに対して、エミッタンスは運動エネルギーの広がりとビームサイズを表している。温度だけでは充分ビームの性質を表し得ない事があるという事に注意したい。

§ 5-2 加速過程

従来のリニアック中の加速過程のデザインの方法では、加速電場は、高周波源の制約とか、放電の限界とか、加速管全体の長さとか、諸々の条件に従って決められており、横の収束とは無関係であった。一方横の収束は、全体を通じて収束力が一定になるようにとか、アクセプタンスが大きくなるようにとかにより決められ、色々な方法はあるが、縦の収束力とは、無関係といってよかった。加速過程が縦と横の二つの envelope equations で記述

され、縦と横の運動がカップルする場合には、縦横の二つの収束は関連して決められなければならない。equipartitioning を加速過程全域で実現するというのは、その一つの方法である。

rms matched beam を考える。§ 3-4 (3-4-29) (3-4-25) より

$$k_{x0}^2 a - \frac{3}{2} \frac{Nr_c}{\beta_0^2 \gamma_0^3} \frac{1}{az_m} \left(1 - \frac{g_0}{2} \frac{a^2}{\gamma_0^2 z_m^2} \right) - \frac{\epsilon_{nx}^2}{\beta_0^2 \gamma_0^2 a^3} = 0 \quad (5-2-1)$$

$$k_{z0}^2 z_m - \frac{3}{2} \frac{Nr_c}{\beta_0^2 \gamma_0^5} \frac{g_0}{z_m^2} - \frac{\epsilon_{nz}^2}{\beta_0^2 \gamma_0^6 z_m^3} = 0 \quad (5-2-2)$$

上式は空間電荷効果を含んだ波数で書き換える事が出来て、

$$k_x^2 a - \frac{\epsilon_{nx}^2}{\beta_0^2 \gamma_0^2 a^3} = 0 \quad (5-2-3)$$

$$k_z^2 z_m - \frac{\epsilon_{nz}^2}{\beta_0^2 \gamma_0^6 z_m^3} = 0 \quad (5-2-4)$$

ここで

$$k_x^2 = k_{x0}^2 - \frac{3}{2} \frac{Nr_c}{\beta_0^2 \gamma_0^3} \frac{1}{a^2 z_m} \left(1 - \frac{g_0}{2} \frac{a^2}{\gamma_0^2 z_m^2} \right) \quad (5-2-5)$$

$$k_z^2 = k_{z0}^2 - \frac{3}{2} \frac{Nr_c}{\beta_0^2 \gamma_0^5} \frac{g_0}{z_m^3} \quad (5-2-6)$$

$$g_0 \approx \frac{2\gamma_0 z_m}{3a} \quad (5-2-7)$$

横と縦の式は互いにカップルしているので、普通にはこれをコンピューターで逐次数値計算する事になる。ここでは space-charge dominated beam の場合について考える。(5-2-1) (5-2-2) よりエミッタンスをゼロとおくと

$$k_{x0}^2 a - \frac{3}{2} \frac{Nr_c}{\beta_0^2 \gamma_0^3} \frac{1}{az_m} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{a}{\gamma_0 z_m} \right) = 0 \quad (5-2-8)$$

$$k_{z0}^2 z_m - \frac{Nr_c}{\beta_0^2 \gamma_0^4} \frac{1}{az_m} = 0 \quad (5-2-9)$$

これより

$$a = \left[\left(\frac{3}{2} \right)^2 \frac{Nr_c}{\beta_0^2 \gamma_0^2} \frac{1}{k_{z0}^2} \left(\frac{k_{x0}^2}{k_{z0}^2} + \frac{1}{2} \right) \right]^{-2/3} \quad (5-2-10)$$

$$z_m = \left[\frac{2}{3} \frac{Nr_c}{\beta_0^2 \gamma_0^5} \frac{1}{k_{z0}^2} \left(\frac{k_{x0}^2}{k_{z0}^2} + \frac{1}{2} \right) \right]^{1/3} \quad (5-2-11)$$

従って

$$\frac{z_m}{a} = \frac{2}{3\gamma_0} \left(\frac{k_{x0}^2}{k_{z0}^2} + \frac{1}{2} \right) \quad (5-2-12)$$

ここで次のequipartitioning が成り立っていると過程する。

$$\gamma_0 \frac{\epsilon_{nx}}{\epsilon_{nz}} \frac{z_m}{a} = 1 \quad (5-2-13)$$

これより、space-charge dominated な rms matched beam が equipartitioning の条件を満たす時の、縦と横の収束力とエミッタンスの関係が求まる。

$$\frac{k_{x0}}{k_{z0}} = \left(\frac{3}{2} \frac{\epsilon_{nz}}{\epsilon_{nx}} - \frac{1}{2} \right)^{1/2} \quad (5-2-14)$$

従って、加速過程で規格化エミッタンスが変化しないとすれば、equipartitioning を保つ為には、縦と横の外からの収束力の比を、加速過程で一定に保つ必要がある。その比は入射時の規格化エミッタンスの比により決まる。

リニアックでは縦の収束力は § 3-1 より

$$k_{z0} = \left(-\frac{q}{mc^2} \frac{2\pi}{\lambda} \frac{E_m \sin \phi_s}{\beta_0^3 \gamma_0^3} \right)^{1/2} \quad (5-2-15)$$

普通のデザインでは、加速電場に由来する $E_m \sin \phi_s$

は殆ど一定とする。この場合縦収束力のエネルギー依存性は

$$k_{z0} \propto \frac{1}{(\beta_0 \gamma_0)^{3/2}} \quad (5-2-16)$$

となる。横の収束力を位相進みで表すと

$$k_{x0} = \frac{\sigma_{x0}}{2\beta_0 \lambda} \quad (5-2-17)$$

従来よく使われていた横方向の収束法の一つに、zero-current の位相進みを一定に保つという方法があった。この時の横収束力のエネルギー依存性は

$$k_{x0} \propto \frac{1}{\beta_0} \quad (5-2-18)$$

従って、このような設計のリニアックでは縦と横の収束力の比は、加速に従って次のように変化する。

$$\frac{k_{x0}}{k_{z0}} \propto \beta_0^{1/2} \gamma_0^{3/2} \quad (5-2-19)$$

このようにエネルギー依存性を持つので、equipartitioning の条件を満たす事は出来ない。この場合には横の収束が強すぎるので横の温度が縦の温度よりも高くなり、その結果、縦のエミッタンス増加を起こす事になる。

equipartitioning を保つ為には、横の収束力を縦と同じエネルギー依存性で変化させればよいから

$$k_{x0} \propto \frac{1}{(\beta_0 \gamma_0)^{3/2}} \quad (5-2-20)$$

横の位相進みを使って書き直すと

$$\sigma_{x0} \propto \frac{1}{(\beta_0 \gamma_0^3)^{1/2}} \quad (5-2-21)$$

この場合、横の収束力は、加速に従って弱まる事になるので（位相進み一定の時と比べて）、ビーム半径は大きくなる結果となる。（10）（11）（14）より

$$a = \left[\frac{\epsilon_{nx}^2}{\epsilon_{nz}^2} \frac{1}{k_{z0}^2} \frac{Nr_c}{\beta_0^2 \gamma_0^2} \right]^{1/3} \quad (5-2-22)$$

$$z_m = \left[\frac{\epsilon_{nz}}{\epsilon_{nx}} \frac{1}{k_{z0}^2} \frac{Nr_c}{\beta_0^2 \gamma_0^5} \right]^{1/3} \quad (5-2-23)$$

従って次の形を得る。

$$a \propto \beta_0^{1/3} \gamma_0^{1/3} \quad (5-2-24)$$

$$z_m \propto \frac{\beta_0^{1/3}}{\gamma_0^{2/3}} \quad (5-2-25)$$

equipartitioning に従う上記の加速過程では、加速に従ってビームサイズが大きくなっており、これは、§ 3-6 で述べた粒子の密度分布の観点からみても望ましい方向と結論される。

ビームを 3 MeV ($\beta = 0.0798$, $\gamma = 1.003$) から 1000 MeV ($\beta = 0.875$, $\gamma = 2.066$) まで加速する場合には、

$$\frac{a(1000\text{MeV})}{a(3\text{MeV})} = 2.83$$

$$\frac{z_m(1000\text{MeV})}{z_m(3\text{MeV})} = 1.37$$

と変化する。仮に入射時にエミッタンスの比が

$$\frac{\epsilon_{nz}}{\epsilon_{nx}} = 1.88$$

とすれば、必要な収束力の比は、(14) より

$$\frac{k_{x0}}{k_{z0}} = 1.52$$

入射時のビームサイズの比は、(13) より

$$\frac{z_m}{a} = 1.88$$

加速後のビームサイズの比は

$$\frac{z_m}{a} = 0.91$$

となり、球形バンチに近くなる。

space-charge dominated でない場合には、§ 3-5 (3-5-17) と同じ方法で、ビームサイズの近似式が得られて、

$$a \approx \left[\left(\frac{3}{2} \right)^2 \frac{N r_c}{\beta_0^2 \gamma_0^2 k_{z0}^2} \left(\frac{k_{x0}^2}{k_{z0}^2} + \frac{1}{2} \right)^{-2} + \left(\frac{\epsilon_{nx}}{\beta_0 \gamma_0 k_{x0}} \right)^{3/2} \right]^{1/3} \quad (5-2-26)$$

$$z_m \approx \left[\frac{2}{3} \frac{N r_c}{\beta_0^2 \gamma_0^2 k_{z0}^2} \left(\frac{k_{x0}^2}{k_{z0}^2} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{\epsilon_{nz}}{\beta_0 \gamma_0^3 k_{z0}} \right)^{3/2} \right]^{1/3} \quad (5-2-27)$$

図 5-1 に周波数 324 MHz、3 MeV から 94 MeV まで、equipartitioning の条件下で加速する時の、縦と横のビームサイズの変化を示す。加速につれて縦横ともビームサイズが増大する様子、そして、加速につれて次第に球形バンチに近づく様子がわかる。図 5-2 に示したのは、加速過程における縦横の位相進みであり、図 5-3 には四極磁石の磁場勾配を示した。

加速過程で横のゼロ電流位相進みを一定に保つ場合のビームサイズの変化は (3-5-7) (3-5-8) (3-4-36) を使って求める事ができる。

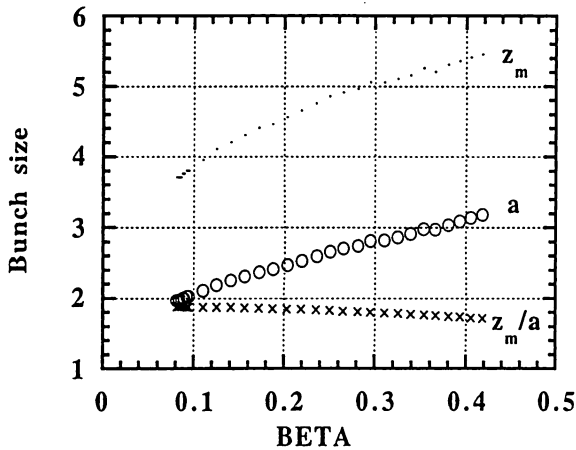


図 5-1 加速過程において equipartitioning が成立している時のバンチサイズの変化とその比。

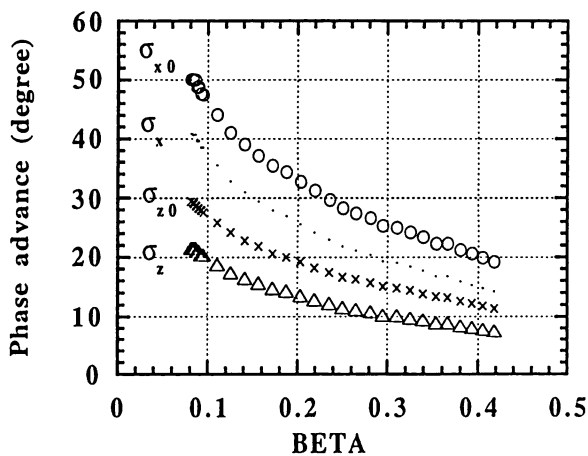


図 5-2 加速過程において equipartitioning が成立している時の縦と横の位相進みの変化。

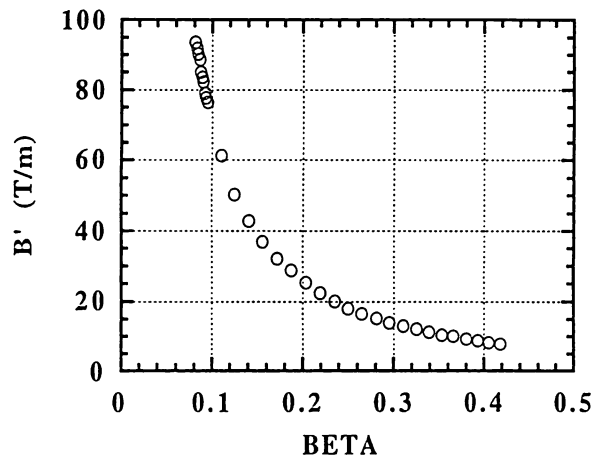


図 5-3 加速過程において equipartitioning が成立している時の磁場勾配の変化。

第6章 大強度陽子リニアックの基礎設計

§ 6-1 はじめに

1987年に1 GeV ワーキンググループは大強度陽子リニアックの提案を行ない、その実現の為に必要と予想される技術開発を行ってきた(参考文献13)。そこでは、ピーク電流 20 mA、平均電流 400 μ A、基本周波数 432 MHz、繰り返し周波数 50 Hz のパルスリニアックが想定されている。

このリニアック、特に DTL の実現性は、幾つかの新しい重要な技術開発の予測の上に成り立っていた。第一に、スペックに見合う永久四極磁石が開発可能であるという判断があった。その後の開発は、その判断を実証した。その時点での第二の予測は、20 mA-1 π mm-mrad の H⁻イオン源は遠からず実現するというものであったが、現時点では、20 mA ビームのエミッタンスは、より大きく設定する必要があると判断される。第三の予測は 3 MeV-RFQ は可能であるというものであり、これはその後の開発により、見事に実証された。

さて、筆者は、更に大強度化を目指す場合の方策を、かつて、提案した(参考文献14)。その要点は次の通りである。

1. あまり大きくないピークビーム電流を選び、
2. あまり高くない繰り返し周波数を選び、
3. 長いビームパルス長を選択する。

上記結論の背景はここでは省略するが、このような平易な指針が、マシンの性格を殆ど決めてしまうといえる。

問題は、リニアックが後続のリングの「要請」に

答えなければいけない点にある。リニアックにとって望ましい事は、リングにとっては逆効果の場合がある。大強度が、高い平均電流を意味するとしても、それを高いピーク電流と高い繰り返し周波数を選んで達成する場合と、究極的に CW リニアックで達成する場合とでは、問題の所在が異なり、従ってデザインも違って来るだろう。要求仕様が目まぐるしく変化する事もありえよう。仕様を満足すると同時に、将来の仕様の変更にも対処出来るようなデザインが望ましい。

最後に、使いやすい形をした理論的結果は、何れもかなりの仮定の上に得られている事を指摘しなければならない。細かい話になってくると、そうした事の効果が出て来て、根本へ戻る必要がある事を記憶しておきたい。

§ 6-2 周波数の選定

周波数の選定において重要な諸因子を列挙すると、

- 1) 縦及び横のビームの運動に対して、空間電荷効果を考慮して適切な収束力が保持出来る事。
- 2) DTL の四極電磁石が可能である事。
- 3) クライストロンが使用可能な事。
- 4) ACS が可能である事。
- 5) コスト。

以下で簡単な検討を行なうが、周波数の選定を議論する場合には、議論の土俵が人により異なる為に、無用の混乱が起こる場合がある。そこで、本稿では、以下の仮定をして議論を進める。

- 1) 入射ビームのエミッタンスは、周波数に

よらず一定である。

- 2) DTL内部の四極磁石の長さは、セル長さの半分とする。
- 3) DTL 入り口の位相進み (FODOの収束系) は60度程度 (電流ゼロ) とする。
- 4) 最大電流30mAのもとで、基本パラメータについては、空間電荷効果を考慮せずに議論を行なう。
- 5) DTL 入射エネルギーは3 MeV とする。

なお、シャントインピーダンスの周波数依存性から、高い周波数が有利である事は、大前提となる。

§ 6-2-1 ビーム孔半径の設定

ラインのベータ関数の最大 β_{max} は次式で与えられる。

$$\beta_{max} = \frac{2L[1+(1-\Lambda/2)\Lambda\theta_0^2/2]}{\sin\mu} \quad (6-2-1)$$

$$\theta_0^2 = \frac{1-\cos\mu}{\Lambda^2(1/2-\Lambda/3)} \quad (6-2-2)$$

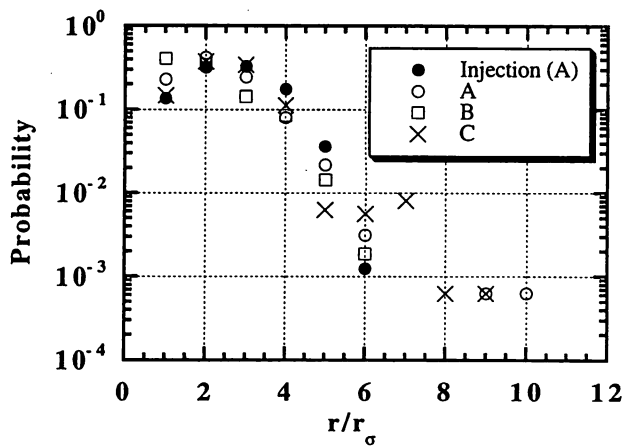


図 6-1 code LINSAC で計算した時のビームプロファイルの例。黒丸は入射ビーム。3種類の異なる加速過程の出力を表示。夫々の分布のrms半径で規格化している。

ここで、 $\theta_0/L=k$ であり、 k は位相振動の波数、 $L=\beta\lambda$ はセル長、 $\beta=v/c$ 、 λ はRF波長、 Λ は四極磁石長さとセル長さの比、 μ は横方向位相振動の位相進み(周期 $2L$)である。上式より、 β_{max} は波長に比例する事がわかる。従って、ビームの大きさは、波長の平方根に比例する。そこで、ビーム孔半径は波長の平方根に比例して選ぶ事が適当である。matched beamの場合に(3-4-41)が成り立つ事を使っても同じ結論となる。

ビームサイズは

$$x = \sqrt{\epsilon\beta_{max}} = \sqrt{\frac{\epsilon_n\beta_{max}}{\beta_0\gamma_0}} \quad (6-2-3)$$

実際のビーム孔には余裕を持たせなければいけない。加速途中のビームでは、ビームのテイルはrmsビーム半径の5倍以上はあると考えられる。図6-1にcode LINSACで計算したビームの横方向の分布を示す。横軸は夫々のrms radiusで規格化してある。

§ 6-2-2 四極磁場勾配の設定

横方向の位相進みと必要な磁場勾配の関係は、

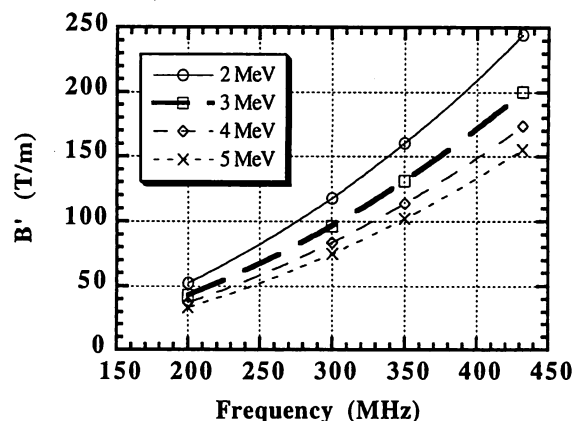


図 6-2 位相進み 60° を得る為に必要な磁場勾配の周波数依存性。

次式で与えられる (§ 3-7 参照)。

$$B' = \frac{mc^2}{q} \frac{\beta\gamma}{c} \frac{\theta_0^2}{L^2} \quad (6-2-4)$$

$$B' \propto \frac{f^2}{\beta} \quad (6-2-5)$$

m は陽子質量、 q は単位電荷を表す。従って、必要な磁場勾配は周波数の平方に比例し、且つ入射速度に反比例する。DTL の FODO、位相進み 60° の場合について、図 6-2 に示す。図 6-3 に磁極表面磁場を示す。表 6-1 にこれらの結果をまとめて示す。アクセプタンスは次式で与えられる。

$$A = \frac{\pi a_0^2}{\beta_{\max}} \quad (6-2-6)$$

従って、ビーム孔半径 a_0 を波長の平方根に比例して変化させれば、アクセプタンスは、周波数によら

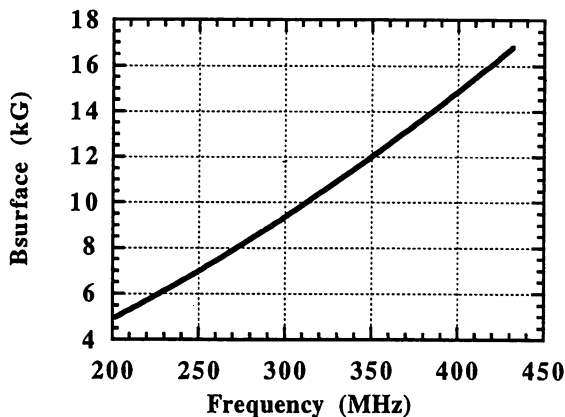


図 6-3 四極磁石表面の磁場 (3 MeV 入射、 $\mu=60^\circ$)。

表 6-1 周波数に依存する入射点 (3 MeV) の基本パラメーターの例。

| 周波数 MHz | セル長さ mm | β_{\max} m | ビーム孔半径 mm | 磁石半径 mm | B' T/m | Bsurface kG |
|------------|------------|---------------------|--------------|------------|-------------|----------------|
| 201 | 119.0 | 0.395 | 9.37 | 11.37 | 43.4 | 4.94 |
| 300 | 79.7 | 0.264 | 7.67 | 9.67 | 96.7 | 9.35 |
| 324 | 73.8 | 0.245 | 7.38 | 9.38 | 112.7 | 10.6 |
| 350 | 68.3 | 0.227 | 7.10 | 9.10 | 131.6 | 12.0 |
| 432 | 55.4 | 0.184 | 6.39 | 8.39 | 200.4 | 16.8 |

ず一定値となる。

電磁石の場合には、磁極表面磁場が 10 kG を大きく越えるものは、作りにくいと考えるのが妥当である (より正確には、局所的な磁束密度が 1.8 - 2.2 Tesla 程度と考える方が妥当)。従って、入射エネルギーが 3 MeV で、電磁石を使用する場合には、選択周波数の上限は、表 1 に関して言えば、324 MHz となる。

更に高い周波数を選択する為には、必要な部分の四極磁石を永久磁石で作るか、又は、DTL への入射ビームエネルギーを高くして、必要となる磁場勾配を下げる方法がある (6-2-5)。前者の方法では、電磁石を使って得られるチューンが変えられるという最大の長所を、ほとんど喪失してしまう結果となり、ポリシーに欠ける。後者の場合は、RFQ の加速エネルギーをあげる事によって可能となる。この場合、RFQ が RF 的に独立な 2 個のタンクとなるならば、二つのタンクの高周波の位相と振幅の相関という新たなチューニングパラメーターが増える事になり、RFQ は収束と加速を同じ高周波で行なうのでパラメーターが少なくチューニングが簡単であるという長所がくずれる。

リング入射を予定するリニアックは、低エネルギー領域において、速いチョッパー (立ち上がり

20nsec程度) を使って、リングが受け入れられない部分のビームをチョップする必要がある。このチョッパーの入れられそうな所はRFQとDTLの間のビームラインである。従って、このビームラインのエネルギーは、チョッパーの性能とビーム損失による放射化の問題とも関係しており、ビーム損失により中性子が発生しない低エネルギーが望ましい。あるエネルギーを決める時に、多くの因子を考えなければいけない好例であろう。

§ 6-2-3 エミッタンスの増加

空間電荷効果自体の作用と、それを媒介としての作用の二通りの仕組みにより、空間電荷効果はビームのエミッタンスの増加をもたらし、加速ビームを劣化させる。

エミッタンスの増加は基本的には次式であらわされる。

$$\frac{\epsilon_f}{\epsilon_i} = \left(1 + 2 \frac{k_0^2}{k_i^2} h \right)^{1/2} \quad (6-2-7)$$

ここで、 ϵ_i と ϵ_f は、始めと終りのエミッタンス、 k_0 はゼロ電流の収束力、 k_i は空間電荷を含む収束力、 h はエミッタンス増加をもたらし原因となるべきエネルギー源をあらわし、例えば、

- 1) 電荷の分布状態に依存する field energy、
- 2) 粒子の運動エネルギー、
- 3) 粒子の位置エネルギー、

などが考えられる。粒子のエネルギーは、空間の自由度3に対応する成分に分ける事が出来るが、この自由度に関しては、最終的に適当にエネルギーが分配されると考えられ、これを equipartitioning と呼ぶ。従って、上記3項のエネルギーが終状態においては、夫々の自由度の間にてバランスされなければならないという意味で、

4) equipartitioning による emittance transfer、および、終状態までの過程は、縦横の収束力に依存する意味から

5) ビームラインの収束パラメーターと、それ自体の非線形性が、意味をもつ事になる。

電荷分布の非一様性に由来するエミッタンス増

表 6-2 周波数による加速パラメーターの相違。

| Frequency | 201 | 300 | 324 | 350 | 432 | MHz |
|-----------------------|------|------|-------|-------|-------|---------------|
| Emittance (90%) | 0.15 | 0.15 | 0.15 | 0.15 | 0.15 | π cm-mrad |
| Eacc | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | MV/m |
| Beam radius | 2.45 | 1.85 | 1.77 | 1.69 | 1.47 | mm |
| $\Delta\phi$ | 6.4 | 8.5 | 9.0 | 9.6 | 11.6 | degree |
| B' | 43.3 | 96.5 | 112.6 | 131.4 | 200.2 | T/m |
| σ_x^0 | 60 | 60 | 60 | 60 | 60 | degree |
| σ_x | 42.4 | 50.0 | 51.1 | 52.2 | 54.4 | degree |
| σ_x/σ_x^0 | 0.71 | 0.83 | 0.85 | 0.87 | 0.91 | |
| μ_i | 0.50 | 0.31 | 0.27 | 0.24 | 0.18 | |
| EGF | 5.0 | 2.3 | 1.9 | 1.6 | 1.1 | % |

EGF: emittance growth factor

加を考える。この場合には (6-2-6) 式は

$$\frac{\epsilon_f}{\epsilon_i} = \left(1 + \frac{1}{3} \left(\frac{k_0^2}{k_i^2} - 1 \right) \frac{U}{w_0} \right)^{1/2} \quad (6-2-8)$$

とあらわされる。ここで、 U/w_0 はビーム内の電荷分布の非一様性に由来するエネルギーをあらわし、Gauss 分布では 0.308 となる。上式を space-charge parameter μ_t を使って書き直すと、

$$\frac{\epsilon_f}{\epsilon_i} = \left(1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\mu_t}{1 - \mu_t} \right) \frac{U}{w_0} \right)^{1/2} \quad (6-2-9)$$

$$\mu_t = 1 - \frac{k_i^2}{k_0^2} = 1 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \quad (6-2-10)$$

となる。ここで σ は横方向振動の位相進みをあらわす。space-charge parameter μ_t は、収束力とビームサイズの両方に依存するパラメーターであり、その周波数依存性は次式で近似出来る。

$$\mu_t \propto \frac{N}{a^2 z_m k_0^2} \quad (6-2-11)$$

ここで、 N はバンチ内の粒子数、 z_m はバンチの長さを表すので、 $a^2 z_m$ はバンチの体積に比例する量、波数 $k_0 = \sigma_0 / 2\beta\lambda$ は収束の位相進みと周期に関連している。周波数に依存しない一定の電場を仮定すれば、ビーム半径 a は、波長の平方根に比例し、 z_m は波長の 1/4 乗に比例するので、 μ_t は波長の 7/4 乗に比例する。高い周波数が望まれる所以である。

具体的なパラメーターを検討する為に、ここではある一定の加速電場 (2 MV/m) を設定した上で、equipartitioning が成立するような入射時の値を求めてみた。その場合のビームパラメーターが、実際のビームに比べて近似的に許容範囲内に収まる

かどうかは、別の検討対象となる。表 6-2 にビーム電流 30 mA の場合の結果をまとめて示す。200 MHz と 300 MHz は空間電荷効果の働きにおいて大きな差 (約 2 倍) があるが、300 MHz と 350 MHz の差は約 30% である事がわかる。

§ 6-2-4 三種類の周波数によるシミュレーション

3 種類 (201, 324, 432 MHz) の周波数を使ってシミュレーションを行ない、結果の比較を行なう。ここでは出力エネルギーは昔の DTL デザインの 150 MeV となっている。夫々の加速管の仕様を表 6-3 にまとめた。ここで注意しておきたいのは、周波数が違うリニアックは、加速電場の設定値が異なる場合が多い点である。CW リニアック以外は、その周波数に最適な加速電場を設定する方式が普通採用され、従って、このシミュレーションに用いたリニアックも、加速電場の値が異なり、入射の最適ビームパラメーターも、それぞれのリニアックについて異なる。今回のシミュレーションでは、入射ビームのエミッタンスは同じ値に設定し、縦と横の twiss parameter を変えて、マッチングをとる事にした。入射ビーム (30 mA) には、ガウス分布を用い、規格化 90% エミッタンスは 0.8π mm-mrad である。横方向の収束は、全ての加速過程において equipartitioning が成り立つように設定した。図 6-4 にエミッタンス増加の計算結果を示す。縦と横のエミッタンス増加の値は加速パラメーターの選び方により変化させる事が出来るが、いずれにせよ、マクロ的な空間電荷効果に対しては、高い周波数

の優位性が示される。

注) 本節のエミッタンス増加の中には、mismatchに由来する寄与も含まれると推定される。3次元バンチでは、完全な matched beam を使うシミュレーションは難しい。

§ 6-3 200 MeV - DTL の概要

リニアックの要求仕様を以下に設定する。

- | | |
|----------------------------|---------------|
| 1. peak current | 30 mA |
| 2. pulse length | 400 μ sec |
| 3. repetition frequency | 25 Hz |
| 4. rf max. duty factor | 3% |
| 5. output energy | 200 MeV |
| 6. length of the linac | 150 m |
| 7. additional requirements | |

敷地が限定されている場合には、第6項のリニアック全体の長さが、大きな現実的な制約となる。

表 6-3 150 MeV DTL の基本パラメーター。

| | | | | |
|-----------|-----|------|-----|------|
| Frequency | 432 | 324 | 201 | MHz |
| Eacc | 3 | 2.8 | 2.1 | MV/m |
| Length | 76 | 88 | 111 | m |
| Cell | 342 | 302 | 231 | |
| Prf | 9.0 | 12.6 | 9.5 | MW |
| Q-magnet | PQM | EQM | EQM | |

注) 324 MHz の rf 電力が大きいのは、加速電場の設定が比較的高い為と、電磁石の採用によりドリフトチューブの径が大きくなりシャントインピーダンスが低くなったためであるが、後者については、まだ最適化を全系に対しては行なっていないので、全体として過大評価となっている。PQM=永久四極磁石、EQM=電磁四極磁石。

そして第7項の付加的な要求の中には、色々な方面からの様々な類が考えられる。ここでは付加要求として将来のエネルギーの増強とビームパワーの増強を考える。即ち出力エネルギーを 400 MeV まで増強したいという希望とピーク電流を 2 倍程度にして、繰り返し周波数を 50 Hz にしたいというものである。エネルギーに関しては、すでに FNAL の Injector linac がそのエネルギーを 200 から 400 MeV に増強している。

以上を勘案して基礎的なパラメーターを決めるが、現在その作業は進行中であり、本稿ではその概要を述べる

§ 6-3-1 将来の拡張性

加速エネルギー増強への対応

電子加速と異なり、陽子リニアックでは、その長さを延長して加速エネルギーの増強をするしか方法がない。厳密には方法がない訳ではないが、

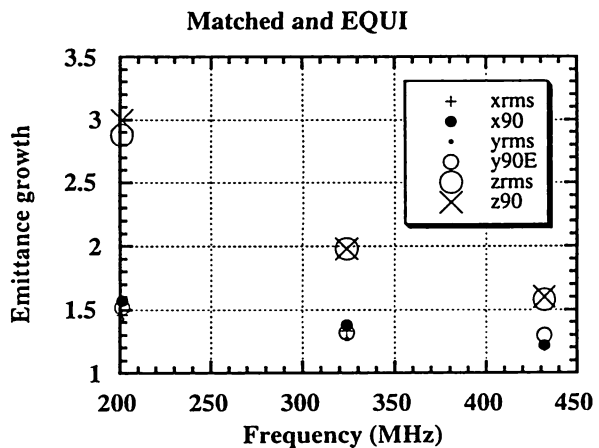


図 6-4 縦と横のエミッタンス増加の周波数依存性。x90 は 90% の x-x' emittance を表す。

今想定している規模のマシーンでは非現実的である。又、マシーンを全て取り替えて、加速電場を高く設定すれば可能であるが、それは全く別の話である。従って、リニアックの前後に延長用の空間を準備しておく事が必要となる。

定義される。

$$I_{ave} = I_p \times T \times f_r$$

この項目の中のどれを大きくしても、平均ビーム電流は同様に増加するが、マシーンに対する影響は大きく異なる。

ビーム電流増強への対応

平均ビーム電流 I_{ave} はピーク電流 I_p とビームパルス幅 T と繰り返し周波数 f_r を掛け合わせたもので

(1) ピーク電流を増やす場合

これは、空間電荷効果を含むビームの振る舞いを変化させ、特に過渡的なビーム負荷効果の影響

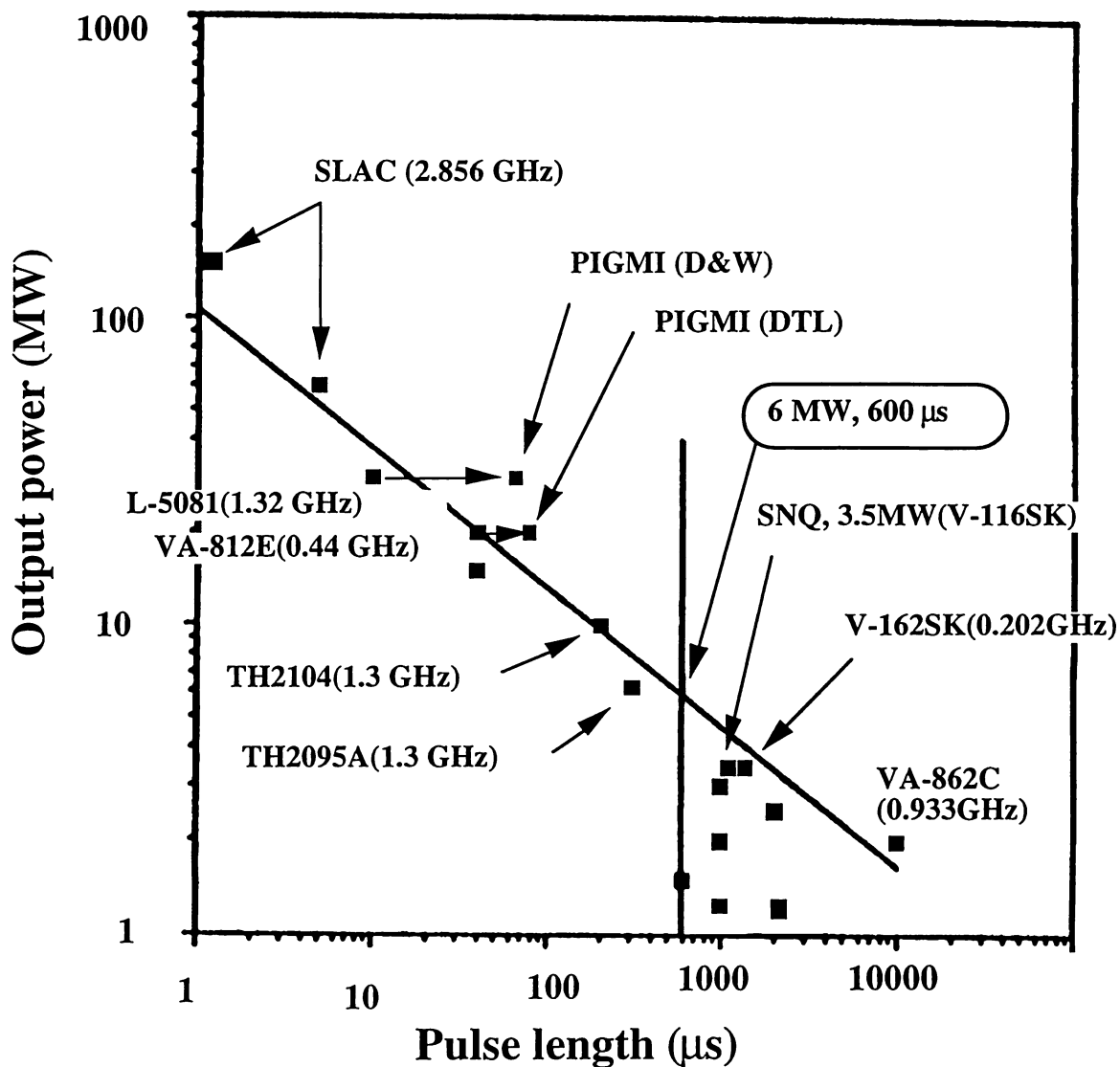


図 6-5 現存するパルスライストロンのピーク出力とパルス幅の関係 (参考文献 13, I-p.164 より修正して転載)。

が大きくなる。イオン源から供給されるエミッタンスも確実に増加する。従って、総合的にみて、ビームロスの問題は増大する。必要な高周波電力のピーク値が増大するが、増えた高周波電力は、ビームが吸収するので、必要な冷却パワーは変化しない。

(2) ビームパルス幅を増やす場合

基本的には、ビームの運動には変化がない。ビームパルス幅全体に対して、過渡的な部分のビームが占める割合が相対的に減少するから、良い傾向ではある。しかし、全体で見れば、ビームロスは増加するだろう。空洞の励振時間が長くなるので、必要な冷却パワーは大きくなる。必要な高周波電力のピーク値は変わらないが、パルス長さの増大に伴って、一本の出力管が供給可能なピーク電力は減少する事が予想されるので(図6-5)、電源の数を増やす必要があるだろう。このタイプの究極に CW リニアックが存在し、ここでは、過渡現象に伴う効果が消滅するという利点がある。

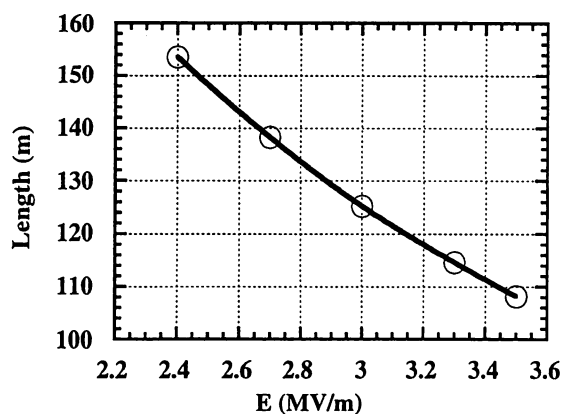


図 6-6 200 MeV DTL の加速電場とリニアック全長の関係。本図には、タンクとタンクとの間の長めのドリフトスペースも考慮されている。

ある。なおビームパルス幅に関しては、後続の円形加速器の入射条件による制約がある事を注意する必要がある。

(3) 繰り返し周波数を増やす場合

基本的には、ビームの運動には変化がない。ビームロスに大きく寄与する過渡的な部分が多くなるので、悪い傾向である。繰り返し周波数に比例して、より大きな平均高周波電力と冷却性能とが必要となろう。

ビームパルス幅に繰り返し周波数を掛けた量をデューティと呼べば、デューティが同じ時には、繰り返し周波数が少なくて、パルス長さが長い組み合わせが、大強度陽子リニアックには望ましいと結論出来る。

§ 6-3-2 加速電場について

加速エネルギー利得は次式で与えられる。

$$\Delta W = E_0 T L \cos \phi$$

ここで E_0 は平均加速電場、 T は transit time factor、 L は空洞長さ、 ϕ は同期位相を表す。粗い計算であるが、 $\Delta W=200$ 、 $T=0.8$ 、 $\phi=30^\circ$ 、活用出来る空洞長さを 100 m とすれば、平均加速電場 2.9MV/m を得る。稼働中の世界の陽子リニアックと比較すれば、この値は相当に大きい値である。ちなみに、KEK PS リニアックはおよそ 2.1 MV/m (但し 201 MHz) で運転されている。

JHP 200 MeV リニアックは、将来の拡張を考えて、当初の長さ全体を 150 m 程度に納める。これから、加速電場の大きさは殆ど決まってしまう。高周

波電源、冷却、総合コスト等の多くの観点からみて、それは高すぎる加速電場を設定する事になるだろう。デューティーが3%のリニアックなので、高周波発熱が電場の制限となる事はない。high-dutyのリニアックでは、むしろ高周波発熱の冷却性能から電場が制限される。そこから超伝導へ向かう必然性も生まれる。加速電場と加速管の全長との関係を図6-6に示す。このように与えられた制限の中で、equipartitioning入射を実現出来る加速電場を設定する。

加速電場の大きさは、空洞内の放電現象を通じて、周波数の選定と関係している。しばしば使われる放電の目安の基準電圧 (Kilpatrick limit:KL) は、周波数が高くなるに従って大きくなる (ほぼ周波数のルートに比例する、図6-7、6-8)。よく使われる計算式は

$$f = 1.64 \times 10^4 V^2 \exp\left(-\frac{0.085}{V}\right)$$

ここでf [MHz]、V[MV/cm]である。周波数200 MHzでは約15 MV/mであり、周波数432 MHzでは20 MV/mとなる。この値は放電現象の物差しと

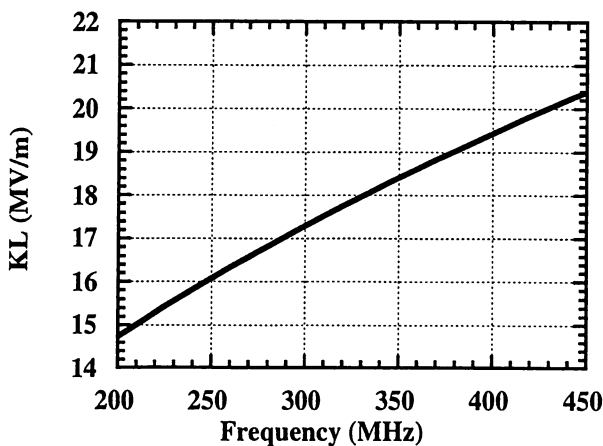


図6-7 Kilpatrick field limit vs. frequency.

しての一つの基準に過ぎず、この値を越えるから即座に駄目であるという議論にはならない。その他の条件と組み合わせて判断するのが適当であろう。空洞内の最大電場は、平均加速電場のおよそ5倍程度なので、例えば、200 MHzで加速電場2.9 MV/mを設定すれば、最大表面電場はKLと同程度となり、長期運転の時には安全度が小さくなるを考える。従って、この観点からは、より高い周波数が望ましい。PS 200 MHz DTLの入射部の加速電場は1.5 MV/mであるが、場合によっては、放電に悩まされる。

§ 6-3-3 SDTL の検討

DTLの製作及び運転時の問題点は、ドリフトチューブの中の電磁石に起因する事が多い。従って、収束用磁石をドリフトチューブの外へ出す構造は自然な発想と言える。その構造をSDTL (separated-type DTL) と呼ぶ (図6-9、参考文献1)。これはドリフトチューブが持つ2つの機能 (加速

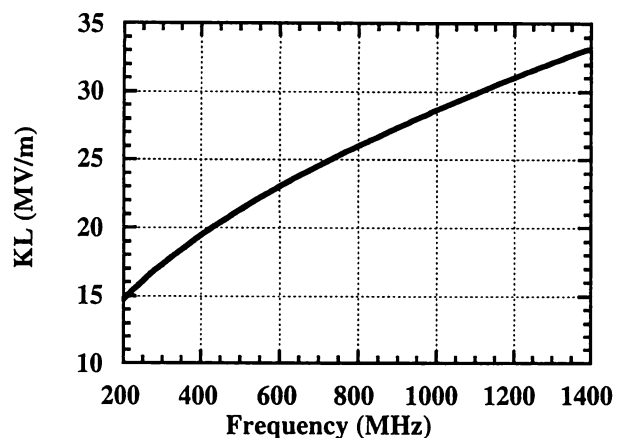


図6-8 Kilpatrick field limit vs. frequency.

と収束)を分離させる試みであり、DTLの加速管としての大きな長所を失わせるものであるが、逆に、ある構造に複数の機能を持たせるべきでは無いという重要な昔からの教えに従う結果となっている。というわけで、SDTLには、製作上の簡略化など多くの優れた点があるが、新たなビームダイナミックスの問題も付随する。簡単にSDTLの特徴をまとめると、

長所

- 1) 収束用磁石がタンクの外へ出て、個数も減る事により、製作(ドリフトチューブの製作、冷却、製作精度、設置精度)が技術的に容易となり、経費も激減する。
- 2) ドリフトチューブの形状を自由に設定できるのでシャントインピーダンスが大幅に増加する(セル計算で40%以上)。
- 3) 横方向の収束周期が長くなり、後続のCCLへの転換がスムーズに出来る(横方向マッチングセクションが必要でない)。
- 4) ビームサイズが広がるので空間電荷効果を

抑制出来る。

- 5) 前項と同じ事であるが、ビームの横方向密度分布が、一層一様分布に近づく。
- 6) メンテナンスが容易となる。

短所

- 1) ドリフトスペースが導入されるので、これが縦方向の運動に悪影響をもたらす。
- 2) 横方向収束周期が長くなる。横方向アクセプタンスが少し減少する。
- 3) 全体の長さが増える。
- 4) 高周波系の部品が増え、複雑となる。
- 5) DTLとSDTLの接続部分が必要となる。

短所はあるが、それを上回る長所がSDTLには認められる。従って、出きるだけ低エネルギーからSDTLを採用する事が望ましいが、エネルギーが低い程、短所の効果が目立ってくるので、遷移エネルギーの決定には十分な検討が必要となる。その検討項目は以下のものが考えられる。

- 1) ビームダイナミックス

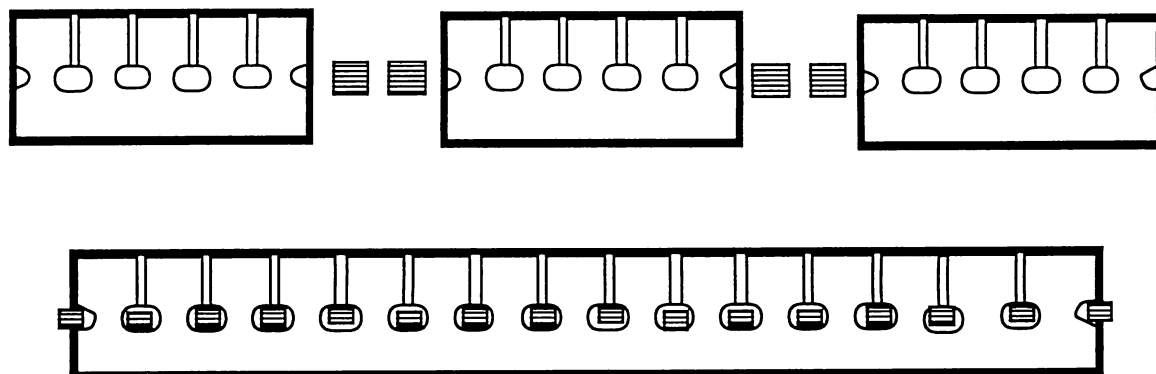


図6-9 SDTL(上図)とDTL(下図)。斜線部が収束磁石を表す。

2) 高周波システム

3) 運転時の問題点 (チューニング法)

(2) と (3) は密接に関連している。ユニットタンクの長さやユニットの結合数により、一つの高周波源に必要な高周波励振電力が決まる。一つのクライストロンから分岐して給電する場合には、各ユニットタンクの励振電力を同じに選んでおく事が望ましい。ブリッジカップラーによる結合の場合には、別の考え方が必要となろう。

低いエネルギーから SDTL を使う事が望ましいが、高周波システムの複雑化とそれに伴うコスト及びドリフトスペースの増大を考えると、短いユニットタンクは望ましくない。長いユニットタンクは、高いエネルギーを意味しているが ($\beta\lambda$ の単位で考える)、ユニットタンク内のセル数を増やすと、それは横方向収束系の周期の増大をもたらす。従って、遷移エネルギーはいくつかの相反する要求の妥協により決まる事になる。

SDTL はドリフトチューブ内に磁石を含まないの

で、ドリフトチューブ外径を小さくしてシャントインピーダンスをあげる事ができる。同じ理由により、ビーム孔半径を大きくして横方向のアクセプタンスを大きくでき、これは収束周期の増加によるアクセプタンスの減少を相殺する。ビームの広がりが大きくなるので、空間電荷効果の観点からも望ましい。SUPERFISH で計算する DTL シャントインピーダンスには、普通は端板による損失の効果を含ませない。しかし、SDTL でセル数が小さい場合には、この効果が効いて来る。

図 6-10 には、324 MHz の ZTT を示す。SDTL は DTL に比べ、40% 近いシャントインピーダンスの増加が期待できる。この場合の比較対象の DTL は、中に四極電磁石を含むかなり直径の大きいドリフトチューブを想定した DTL である。

SDTL 内のビームダイナミクスは現在検討中であるが、これまでの結果の範囲では不都合は見いだされていない。特に、DTL から SDTL への変更をどこで行うかは、先に述べたように色々な事が絡む大きな問題であるが、これはビームダイナ

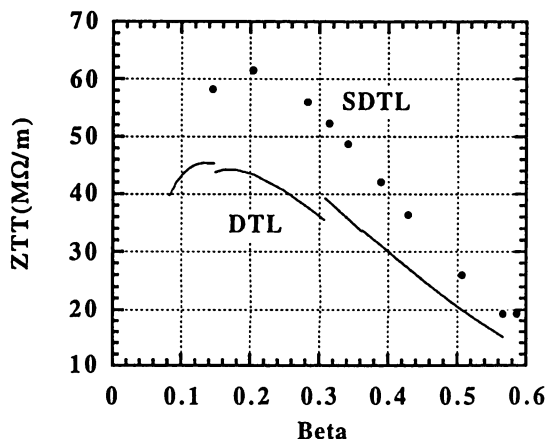


図 6-10 SDTL と DTL の ZTT の比較。

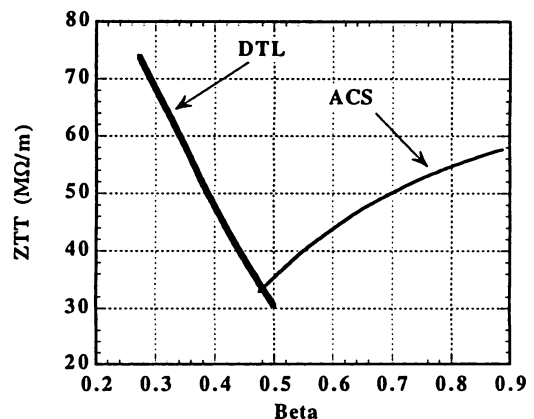


図 6-11 DTL(432 MHz) と ACS(1296MHz) の ZTT 。

ミックスの計算結果から、複数の最適値候補が得られ、その中から選択出来ると考えている。

§ 6-3-4 CCL の検討

陽子リニアックでは、加速するに従って、粒子の速度が大きく変化する。それに伴って、あるエネルギー帯でシャントインピーダンスが最大となるような加速管のタイプが殆どユニークに決まってしまう。従って、加速効率の経済性の持つ意味が大きいマシンにおいては、周波数の異なる数種類の加速管を組み合わせ、全体で経済的にな

るように考える。加速管の構造が変わる地点をトランジションと呼ぶ。このトランジションエネルギーの設定は、マシンとビームの性質を決める重要な因子であるので、一般的に言えば、単に経済性のみで決める事は出来ず、全体の整合性と合理性を考慮すべきであろう。例えば、RFQは加速効率と作りやすさの点から、その出力エネルギーを低く押さえるのが良いという考え方がある。確かに、この主張は、それだけを考える時正しく、一見もつともである。しかし、作りやすさが、加速管の電磁場の主モードとそれに連なるモードとの配置に関連している場合には、唯単に長さに比

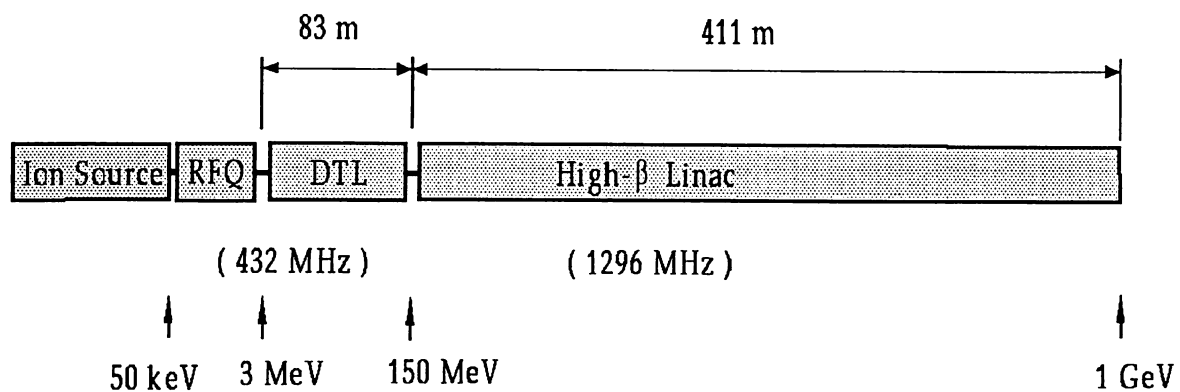


図 6-12 1 GeV 陽子リニアックの構成。

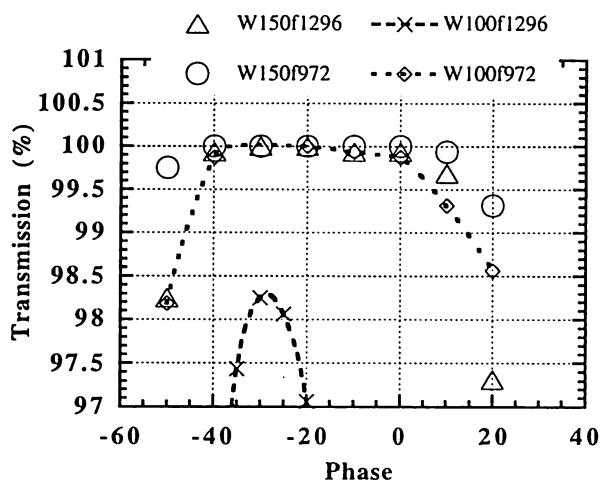


図 6-13 CCL の透過率を入射位相に対して図示。
W150f1296 は入射エネルギーが 150 MeV、周波数が 1296 MHz を示す。

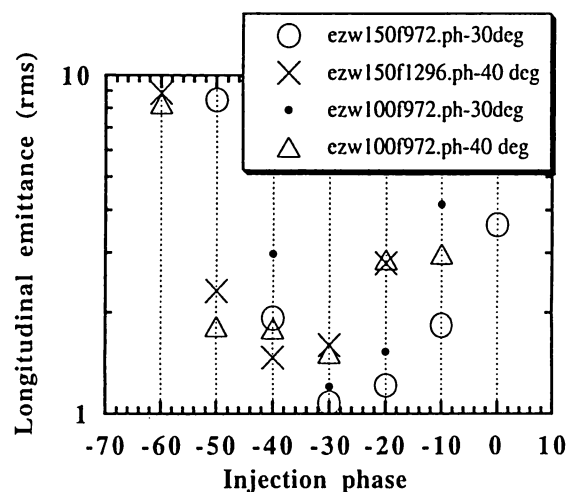


図 6-14 縦方向出力 rms エミッタンスの入射位相依存性。縦軸は log スケール。

例して作りにくくなるわけではないという主張にも説得力がある。更に、RFQ が、ある大きなマシンの一部を構成する場合には、その他の部分との整合性が求められるのである。具体的には、RFQ の前後につづくビームラインのデザインと、後続のドリフトチューブリニアック (DTL) のデザインとが直接に関係するのである。

ある時期のデザインには、二つの加速管のシャントインピーダンスが等しくなるエネルギーをトランジションに設定するものがあつた (図 6-11 参照)。しかしながら、加速管の構造の変化によってトランジションを境に、縦方向と横方向の収束力の配位が突然変化し、これは、ビームの質に悪い影響をもたらす。従って、大強度マシンでは、トランジションが持つビームダイナミクスへの影響が重要視されねばならない。この意味で言えば、SDTL はトランジションにおいて、縦と横の収束力の配位の中で、横だけを変えている。縦方向の収束系は変わっていない。実際、トランジションで行われる周波数の転換は、ビームダイナミクスに大きな影響を持つ。簡単に言えば、第一は、縦エミッタンスの増大による非線形効果の増大。第二は、高い周波数使用が本来もっているはずのバンチ内の粒子数の減少に起因する空間電荷効果の減少というメリットが生かせない事である。

我々の当初の 1 GeV リニアックデザインでは、3 種類 (RFQ, DTL, CCL) の加速管が使われている (図 6-12)。そのトランジションエネルギーは、デザイン当時は、ユニークであつたと記憶している。DTL から CCL へのトランジションエネルギーに関する計算例を図 6-13 と 6-14 に示す。図 6-

13 は、324 MHz DTL により加速したビームをトランジションエネルギー 100 MeV と 150 MeV で、周波数 972 MHz と 1296 MHz の CCL へ入射させた時の透過率を示している。計算は LINSAC で行っている。これより、4 倍の周波数比は少し危険な事がわかる。図 6-14 は CCL の入射時点の安定位相を -30 と -40 度を選んだ時の縦方向の出力エミッタンスの入射位相依存性を示したものである。透過率は良くてもビームの性質の安定性に問題がある場合もある。これらは、マシンの要求仕様と運転技術に依存する検討項目となろう。

さて、リニアックの出力エネルギーが当面 200 MeV の場合に、どのような戦略でリニアックの構成を考えるべきか。これが一番重要な問題である。将来の延長 (これはこの先、いつになるか見当がつかない。FNAL では 20 年以上か) に備えて、当初の運転に無理を強いるような選択は難しい。originality を強調する立場に立てば、CCL 候補としては ACS が望ましい (参考文献 15)。実際、基本性能はほとんど文句無しであり、その電磁場の対称性は他に比べて優れている。その欠点はサイズが大きくなる点にある。そこで、200 MeV まで同じ周波数で作り、将来予定される、その先へのエネルギー増強、又は途中からの増強は、周波数比が 3 倍と 4 倍のいずれにも対応出来るようにする。その場合、周波数転換によって、縦の収束系の転換のみを生じ、横の収束系は SDTL の採用により滑らかに接続する設計となる。

§ 6-3-5 DTL への入射

第 5 章で扱った equipartitioning を DTL の加速過

程で実現する為には、入射過程もできるだけ equipartitioning を満足するようにデザインする事が望ましい。周波数 324 MHz、入射エネルギー 3 MeV、電流 30 mA を仮定してパラメーターを検討してみよう。実際にはコンピューターにより、rms matched beam and equipartitioning の条件を満足する加速パラメーターとビームパラメーターを選択することになる。

入力パラメーター

周波数 $f=324$ MHz: $\lambda = 0.925$ m
 エネルギー 3 MeV: $\beta = 0.08, \gamma = 1$
 電流 30 mA: $N = 5.78 \times 10^8$ / bunch

横方向規格化エミッタンス

$$\epsilon_{nx} = 1.5 \times 10^{-6} \pi \text{m} \cdot \text{rad}$$

横方向ゼロ電流位相進み $\sigma_{x0} = 58$ deg

$$\text{横方向波数 } k_{x0} = \frac{\sigma_{x0}}{2\beta\lambda} = 6.84$$

縦方向ゼロ電流位相進みは (3-1-7) より

$$k_{z0} = \left[-\frac{q}{mc^2} \frac{2\pi E_m \sin \phi_s}{\lambda \beta_0^3 \gamma_0^3} \right]^{1/2} = 4.06$$

$$\sigma_{z0} = 2\beta\lambda k_{z0} = 0.601 \text{rad} = 34.4 \text{deg}$$

ここでは表6-4と一致させる為に E_m の中で $T=0.77$ を使っている。この位相進みは 2セル当たりであり、表6-4では、この半分の 1セル当たりで表示されている。

表 6-4 matched and equipartitioned の条件を満たす入射パラメーターの計算例。

| F | W | EZOPT | AM | DPHIRMS | P | DPBYP | ENXN | CI | BD | SIGZ0 | SIGZ | SIGX | MUX | MUZ | KX/KZ | SCPX | SCPZ |
|------|----|-------|------|--------------------|-------|--------------|-----------------|-----|-------|---------------|------------|------------|--------------|--------------|-----------|---------|---------|
| f | w | E_m | a | $\Delta\phi_{rms}$ | p | $\Delta p/p$ | ϵ_{nx} | I | B' | σ_{z0} | σ_z | σ_x | k_x/k_{x0} | k_z/k_{z0} | k_x/k_z | μ_x | μ_z |
| 324. | 3. | 3.03 | 1.82 | 7.3 | .981 | .0047 | .15 | .03 | 109.2 | 17.2 | 26.4 | 47.7 | .82 | .77 | 1.80 | .32 | .41 |
| 324. | 3. | 2.80 | 1.83 | 7.4 | 1.022 | .0045 | .15 | .03 | 109.2 | 16.5 | 25.0 | 47.9 | .83 | .76 | 1.92 | .32 | .43 |
| 324. | 3. | 2.95 | 1.82 | 7.4 | .982 | .0047 | .15 | .03 | 109.2 | 16.9 | 26.1 | 47.8 | .82 | .77 | 1.83 | .32 | .41 |
| 324. | 3. | 2.73 | 1.82 | 7.5 | 1.025 | .0045 | .15 | .03 | 109.2 | 16.3 | 24.6 | 47.9 | .83 | .76 | 1.95 | .32 | .43 |

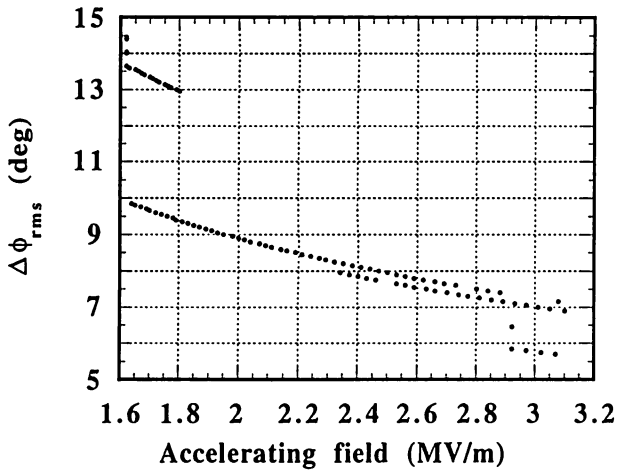


図 6-15 matched and equipartitioned の条件を満たす入射ビーム位相幅と加速電場の関係。

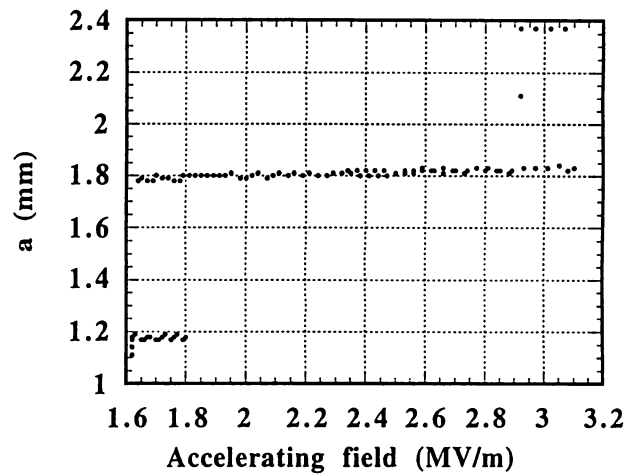


図 6-16 matched and equipartitioned の条件を満たす入射ビーム半径と加速電場の関係。

以上の初期条件のもとで、パラメーターの組を探す。その結果を表6-4に示した。このような組が、与えられた $\Delta p/p$ に応じて無数に得られる。その数は、equipartitioningの達成の設定精度と $\Delta p/p$ の刻み幅等に依存する。このようにして得られた最適加速電場と最適入射位相幅を図6-15に示す。 $\Delta p/p$ の値に対応して、同じ加速電場に対して複数の $\Delta\phi$ が得られる。図6-16には最適ビーム半径と最適加速電場を示す。図6-17には k_x/k_z を示した。表6-4の最上段の結果について検算をしてみよう。

$$a=1.82 \text{ mm}, \bar{x} = \frac{a}{\sqrt{5}} = 0.814 \text{ mm}, \Delta\phi_{ms} = 7.3,$$

$$z_m = \sqrt{5}\bar{z}_m = \sqrt{5} \frac{\beta\lambda}{2\pi} \Delta\phi \frac{\pi}{180} = 3.36 \text{ mm}$$

$$\Delta p/p = 0.0047 \text{ だから } \Delta\tilde{w} = 28.2 \text{ keV}$$

$$\bar{\epsilon}_{nz} = \frac{\lambda}{2\pi W_p} \bar{\epsilon}_{\Delta\phi\Delta w} = 5.64 \times 10^{-7}$$

$$\epsilon_{nz} = 5\bar{\epsilon}_{nz} = 2.82 \times 10^{-6}$$

$$\frac{\epsilon_{nx}}{\epsilon_{nz}} = 0.53$$

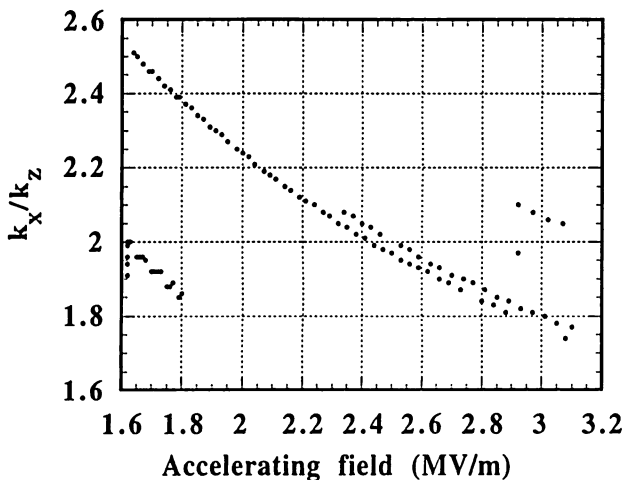


図6-17 matched and equipartitionedの条件を満たす横と縦の収束力の比と加速電場の関係。

バンチの時は $a = \sqrt{5}\bar{x}$ 、 $\epsilon_{nz} = 5\bar{\epsilon}_{nz}$ 等の有効換算係数を使う。よって equipartitioning の条件は

$$\frac{\epsilon_{nx}}{\epsilon_{nz}} \frac{z_m}{a} = \frac{1.5}{2.82} \frac{3.36}{1.82} = 0.98$$

となり、ほぼ満たされている。これは表6-4のpに相当する。縦の波数は(5-1-5)又は(5-2-4)より

$$k_z = \frac{\epsilon_{nz}}{\beta\gamma^3 z_m^2} = 3.12$$

$$\sigma_z = 2\beta\lambda k_z = 0.462 \text{ rad} = 26.5 \text{ deg}$$

§ 3-7 より

$$\begin{aligned} \sigma^\ell &= 2 \cos^{-1} \left(\cos \sigma_0^\ell + \frac{15 I \lambda^3}{W_0 a b^2} \right) \\ &= 2 \cos^{-1} (0.955 + 0.0185) = 26.3 \end{aligned}$$

横の波数も同様にして

$$k_x = \frac{\epsilon_{nx}}{\beta\gamma a^2} = 5.66$$

$$\sigma_x = 2\beta\lambda k_x = 0.838 \text{ rad} = 48.0 \text{ deg}$$

§ 3-7 より

$$\begin{aligned} \sigma^t &= \cos^{-1} \left(\cos \sigma_0^t + \frac{30 I \lambda^3}{W_0} \frac{3b-a}{a^2 b^2} \right) \\ &= \cos^{-1} (0.53 + 0.168) = 45.7 \end{aligned}$$

波数を(5-2-5) (5-2-6) を使って求めると

$$k_z^2 = k_{z0}^2 - \frac{Nr_c}{\beta^2 \gamma^4 a z_m^2} = 4.06^2 - 6.746 = 9.746$$

故に $k_z = 3.12$ 。

ここで

$$r_c = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} = 1.535 \times 10^{-18}$$

を使った。同じく

$$k_x^2 = k_{x0}^2 - \frac{3}{2} \frac{Nr_c}{\beta^2 \gamma^3 a^2 z_m} \left(1 - \frac{a}{3\gamma z_m} \right)$$

$$= 6.84^2 - 15.3 = 31.5$$

故に $k_x = 5.61$ 。空間電荷の効果は

$$\frac{k_x}{k_{x0}} = \frac{5.66}{6.84} = 0.827$$

$$\mu_x = 1 - \left(\frac{k_x}{k_{x0}} \right)^2 = 0.32$$

$$\frac{k_z}{k_{z0}} = \frac{3.12}{4.06} = 0.768$$

$$\mu_z = 1 - \left(\frac{k_z}{k_{z0}} \right)^2 = 0.41$$

横と縦の収束力の比は

$$\frac{k_{x0}}{k_{z0}} = \frac{6.84}{4.06} = 1.68$$

$$\frac{k_x}{k_z} = \frac{5.66}{3.12} = 1.81$$

バンチではあるが § 3-5 (3-5-11) を横方向にあてはめてみると

$$\frac{Ka^2}{\epsilon_x^2} = \frac{I}{I_0 \beta \gamma \epsilon_{nx}^2} = 0.39$$

ここでバンチ内のピーク電流としては、バンチの全幅が

$$\Delta\phi_{full} = 2 \times \sqrt{5} \times 7.3 = 32.6 \text{ deg}$$

なので

$$I = \frac{360}{32.6} \times 0.03 = 0.331 \text{ とした。}$$

別の式で計算すれば

$$\frac{Ka^2}{\epsilon_x^2} = \frac{k_{x0}^2}{k_x^2} - 1 = 0.46、$$

$$\frac{\bar{\lambda}_D}{a} = \left(\frac{\epsilon^2}{Ka^2} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{8} \right)^{1/2} = 0.57、 \quad \bar{\lambda}_D = 1.03 \text{ mm。}$$

従って、ビームは emittance dominated の領域であり、

図 3-2 の番号 3 又は 4 付近の分布といえよう。

バンチの体積は

$$V = \frac{4}{3} \pi a^2 z_m = 4.66 \times 10^{-8}。$$

一様分布と仮定した時の密度は

$$n_0 = \frac{I}{V q f} = 1.24 \times 10^{16} / \text{m}^3$$

$$\omega_p = \left(\frac{q^2 n_0}{\epsilon_0 m} \right)^{1/2} = 1.47 \times 10^8, \quad f_p = 23.3 \text{ MHz。}$$

$$\bar{v}_x = \frac{c \bar{\epsilon}_{nx}}{\bar{x}} = \frac{3 \times 10^8 \times 0.3 \times 10^{-6}}{0.814 \times 10^{-3}} = 1.1 \times 10^5 \text{ m/sec}$$

この速度に対応する加速電圧は

$$V_i = \frac{m \bar{v}_x^2}{2q} = 63 \text{ V。 故に}$$

$$\lambda_D = \frac{\bar{v}_x}{\omega_p} = 0.75 \text{ mm。}$$

これから決まる温度は

$$T = \frac{\lambda_D^2 q^2 n_0}{\epsilon_0 k_B} = 1.46 \times 10^6。$$

エミッタンス又は rms 速度から決まる温度は

$$T_{\perp} = \left(\frac{\epsilon_{nx}}{\bar{x}} \right)^2 \frac{mc^2}{k_B} = 1.48 \times 10^6$$

$$T_{\parallel} = \left(\frac{\epsilon_{nz}}{\bar{z}} \right)^2 \frac{mc^2}{k_B} = 1.53 \times 10^6$$

RFQ から供給されるビームの縦方向エミッタンス

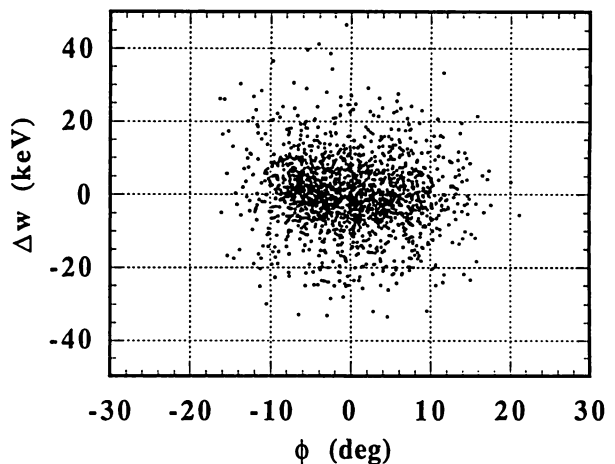


図 6-18 RFQ 出力ビームの縦方向エミッタンスの計算例。

スの計算例を図 6-18 に示す。この分布では

$\Delta\phi_{rms} = 6.19 \text{ deg}$ 、 $\Delta W_{rms} = 9.69 \text{ keV}$ となっている。これらは理想値に近い数字と思われる。横方向の規格化90%エミッタンスは1から3 $\pi\text{mm}\cdot\text{mrad}$ 程度と思われる。実際にはRFQへの入力エミッタンスに加えて、RFQ内のエミッタンス増加、RFQとDTLの間のラインの効果などを取り入れる必要があるから、現実のビームはもっと大きいエミッタンスとなるであろう。従って、表 6-4 から決まるパラメーターの中から、現実にはマッチするパラメーターを選ぶ事になる。その時に、加速電場に関しては、その他の多くの制約を考慮する必要がある。また、横方向のゼロ電流位相進みの設定に関しても選択の余地がある事はいうまでもない。

イオン源から加速電圧 50 keV($\beta=0.01$)で引き出されたビームについて考えてみる。 $I=16 \text{ mA}$ 、 $\epsilon_{xm}=0.5 \pi\text{mm}\cdot\text{mrad}$ として、ビーム半径はビームラインにて7.5 mm、RFQの入り口で1.5 mmとすれば、およそ $Ka^2/\epsilon_x^2 = 23$ and 0.9 となり、ほとんど space-charge dominated である事がわかる。

最後に current limit について考えてみる。基礎の式は、横方向が (3-2-8)、縦が (3-1-19) である。

$$I_t = \frac{2\pi}{3Z_0} \mu_t \frac{mc^2}{q} \frac{a^2 z_m}{\lambda^3} \frac{\gamma_0^3 \sigma_{x0}^2}{1-M_z}$$

$$I_\ell = -\frac{8\pi^2}{3Z_0} \mu_\ell \frac{a^2 z_m}{M_z} \frac{E_m \sin \phi_s}{\beta \lambda^2}$$

ここで次の仮定をする。

- 1) ビーム半径に envelope modulation factor ψ の平方根を掛けたものが、ドリフトチューブのビーム孔の半径とする。
- 2) 横の current limit の時は、縦も current limit 状態に近く、バンチ長さは次式で与えられる。

$$z_m = \beta \lambda \frac{|\phi_s|}{2\pi}$$

- 3) tune depression $\sigma/\sigma_0 = 0.4$ を限界と考える。この時、 $\mu = 0.84$ 。この数字は、シミュレーションによる安定領域限界がこの付近であるという理由による設定である。
- 4) 横の limit では $M_z = 1/3$ を使う。
- 5) 縦の limit は、 $M_z = a/3z_m$ の近似が成り立つ領域にある。

以上の仮定のもとで式を変形すれば、

$$I_t = \frac{\mu_t}{3Z_0} \frac{mc^2}{q} \frac{\beta_0 \gamma_0^3 |\phi_s| \sigma_{x0}^2}{\psi(1-M_z)} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$$

$$I_\ell = -\frac{2\mu_\ell}{Z_0} \frac{\beta a |\phi_s|^2 E_m \sin \phi_s}{\psi^{1/2}}$$

入射時のパラメーターは以下の通り。

3 MeV、 $\phi_s = -30 \text{ deg}$ 、 $a = 0.007 \text{ m}$ 、 $\sigma_{x0} = 58 \text{ deg}$ 、 $\Lambda = 0.5$ 。modulation factor は次式で計算出来る。

$$\psi = \frac{1 + \left(1 - \frac{\Lambda}{2}\right) \frac{\Lambda}{2} \theta_0^2 - \frac{\Lambda}{2}}{\cos \frac{\sigma_0}{2}}$$

ゼロ電流の場合には 2.35 となる。ここではこの値を使う。結果は

$$I_t = 1.1 \text{ A}, I_\ell = 0.52 \text{ A}$$

となる。この電流は、式 (2-6-11) で表されるピーク電流である事に注意する。バンチ内のピーク電流は、bunching factor をこれに掛けた量となる。

§ 3-5 において、横の envelope eq. から求めた最大電流は 18 A であった。両者を比較するには、bunching factor 12 の効果を考慮して、 $18/12=1.5 \text{ A}$ と横の current limit 1.1 A を比較すればよい。

この結果から、我々がDTLで扱う電流は、current limit を大きく下回ると言える。

第7章 Code LINSAC

大強度陽子ドリフトチューブリニアックの
ためのビームシミュレーションコード

§ 7-1 はじめに

ここまでにいくつかの key word があった。エミッタンス、Vlasov eq.、envelope eq.、Maxwell-Boltzmann 分布など、collision の効果をどう取り込むかが大きな問題点となっている。これらはビームの熱平衡状態への展開を正確に計算する為には平均化されたクーロン場だけではなく、2体の散逸効果と考えられる式(2-4-8)の右辺第2項を考慮しなければならない事を示唆している。

計算機シミュレーションを行う場合、collision の扱いについては以下の3通りが考えられる。

- 1) 考慮しない。
- 2) 粘性と拡散項として扱う。
- 3) 第2章(2-4-7)式を厳密に行う。

空間電荷効果による電場を Poisson's eq. により求める方法は、(1)に相当する。(2)の方法を採用すれば、新たに2個のパラメーターが導入されて、議論になりそうであるし、既に多くのプラズマ関係のコードも存在する。すっきりするのは第3の方法であるが、以下の問題点がある。

- 1) 同時に計算のステップも細かくする必要があるので全粒子対の計算に膨大な時間が必要。
- 2) マクロ粒子の collision に特有のエラーの可能性がある。

第1の点については並列型のスーパーコンピューターを利用する事により、充分実用的な計算が可能となる。実際、64プロセッサの並列型計算機

を使って、48000粒子、349セルを計算するのに約32時間である。第2の点は、いくつかの工夫をする事により危険を減らす事が可能と思われる。

こうした考えから、全く新しいリニアックビームダイナミクス計算コードの開発を始めた。

広く使われているコードのPARMILAでは、加速ギャップについて平均した電場が使用される。このコードがリニアックの構造パラメーターを正確に計算する事はよく知られている。ところが、大強度のビームシミュレーションを行なう時には、二つの問題点がある。第一は、空間電荷効果の計算法である。第二は、加速に平均電場を使用している事由来する。いずれも、平均的な力を使っている為、粒子が加速セルの中で示す微妙な動きを無視する結果となり、特に、大強度の場合には結果の信頼性に欠ける。そこで、加速ギャップの電場を厳密に使用する計算コード LINSAC (Linac Simulation Code with an Accurate Field Distribution) を開発した。LINSACでは、1セルの中を細かく(時間的及び空間的に)分割して計算を行なっており、必要となる加速管の電磁場の分布は予め SUPERFISHにより計算しておく。空間電荷効果は、使用する全粒子についてのクーロン力を計算ステップごとに算出して取り込んでいる。このような計算法は、以前の方法に比べると膨大な計算量となるので、ベクトル並列型のスーパーコンピューターを使用する。

§ 7-2 計算法

電磁場中の粒子の運動は次式で記述される。

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (7-2-1)$$

$$\mathbf{p} = m_0 \gamma \mathbf{v} \quad (7-2-2)$$

使用記号は一般的であり、速度 v は $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ である。SUPERFISHにより計算された加速電場の分布は、まず9次の多項式で近似する。多くのエネルギーに対応する多項式の係数をLINSACに読み込ませ、その後、必要な平均加速電場が得られるように規格化を行なう。次に、加速軸上以外の電磁場を求める為に、ユニットセルを単位として、加速電場をFourier展開する。以下の関係式を使う。

$$E_z = \sum_{m=0}^{\infty} A_m I_0(k_m r) \cos \frac{2m\pi z}{L} \cos \omega t \quad (7-2-3)$$

$$E_r = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m 2m\pi}{k_m L} I_1(k_m r) \sin \frac{2m\pi z}{L} \cos \omega t \quad (7-2-4)$$

$$k_m^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \left(\left(\frac{m\lambda}{L} \right)^2 - 1 \right) \quad (7-2-5)$$

ここで I_0 と I_1 は変形ベッセル関数、 L はユニットセル長さ、 ω は角周波数、 t は時間、 λ は自由空間波長を表す。第1式から係数を求め、第5項まで用いて E_r を計算する。このようにして求めた結果を図7-1に示す。計算に必要な他のパラメーターは

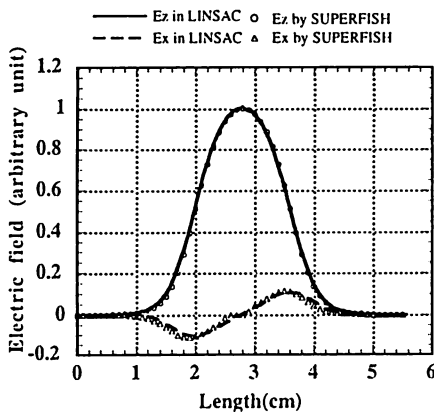


図7-1 ユニットセルの電場分布の例。LINSACの中の近似値とSUPERFISHの計算結果を示す。

PARMILAによるデザインの結果を使用した。セル長さ、収束磁石のパラメーター、ドリフトチューブの長さ、安定粒子のエネルギーと位相、そして周波数などである。従って、PARMILAとLINSACの計算結果は直接比較が可能となる。

(7-2-1)式は、4次のRunge-Kutta法により数値計算する。この時、 i -番目の粒子に働く空間電荷による電場は、他の全ての粒子によるクーロン場の和として次式により計算する。

$$E_i = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j \neq i}^N \frac{r_{ij}}{r_{ij}^3} \quad (7-2-6)$$

ϵ_0 は自由空間誘電率、 r_{ij} は i と j 粒子の距離を表す。計算のベクトル化率を高める為に、全てのユニットセル長さは予め細かく分割して、その各ステップの加速管の電磁場の値は計算が始まる前に指定する。

§ 7-3 ユニットセル内の運動

一様に分布した1600個の粒子集団（入射エネルギー3 MeV）を、432 MHz DTL（平均加速電場3 MV/m）へ入射させ、第11セル内（平均エネルギー4.26 MeV、セル長さ6.64 cm、四極磁石中心から次の四極磁石中心まで）の運動を解析する。入射粒子のエミッタンスと位相の拡がり、RFQの出力ビームと同じとする。

四極磁石がゼロの場合に、横方向の運動エネルギーが、このセルの通過によりどのように変化するかを、横方向の入射位置の関数として図7-2に示す。これは、高周波発散力の効果を表している。

次に四極磁石の値をおよそ175 T/m程度に設定する。この時の横方向の運動エネルギーの変化を図7

-3に示す。これにより横方向の運動エネルギーは1 keV程度変化する。この結果は、セル通過による横方向運動エネルギーの変化は、高周波発散力と四極磁石に依存している事を表している。

図7-4に、ある1個の粒子のドリフトチューブのユニットセル内の縦方向の運動エネルギーを示す。加速ギャップ内でエネルギーが増加する様子が示されている。古いタイプのコードでは、加速ギャップの中心において、ステップ的に運動エネルギーを変化させる近似を使っている。図7-5に、この粒子の、同じセル内における横方向の位置の変化を示す。強力な四極収束磁石がドリフトチューブに挿入され

ている為に、粒子の位置は、そこで急激に変化する事がわかる。

§ 7-4 加速過程の検討

LINSACでは、equipartitioningが成り立つように入射させて、加速途中でも equipartitioningを保つ収束法が採用されている。これは縦と横の収束力を加速過程で一定に保つ事を意味するが、この比を適当に設定する事も可能である。バンチビームの場合に、マッチングさせて入射させた時の envelope eq. は次式で表される。

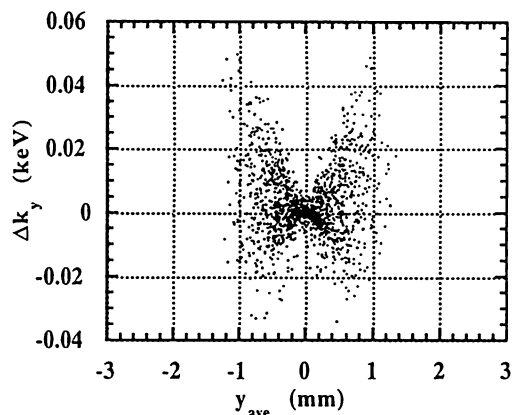
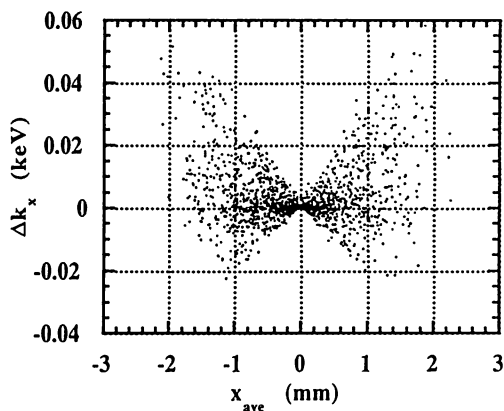


図7-2 あるユニットセルを通過した時の横方向の運動エネルギーの変化を、そのセルの平均横座標に対して図示。磁場勾配がゼロの場合。

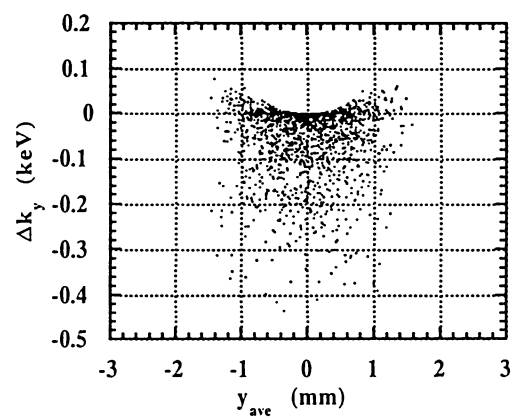
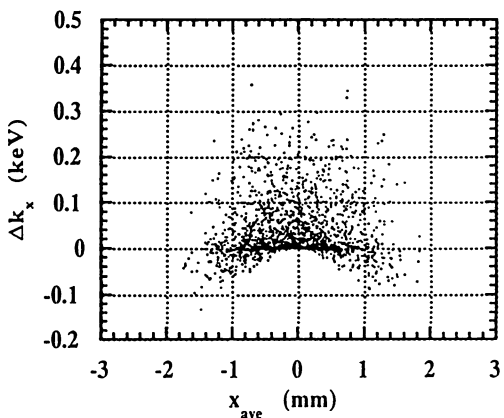


図7-3 あるユニットセルを通過した時の横方向の運動エネルギーの変化を、そのセルの平均横座標に対して図示。磁場勾配がオンの場合。

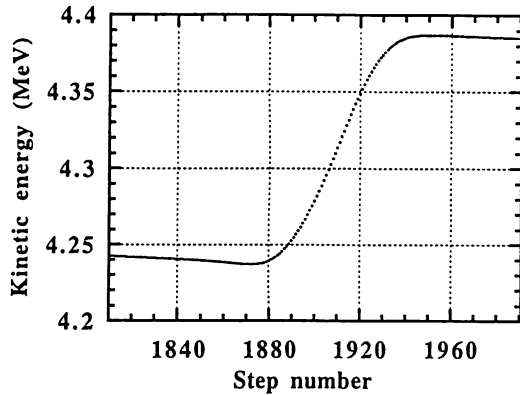


図 7-4 ユニットセル内における 1 粒子の縦方向のエネルギーの変化。横軸は計算のステップナンバー。ここでは、ユニットセルを 180 分割している。

$$k_{x0}^2 a - \frac{3 N r_c}{2 \beta_0^2 \gamma_0^3} \frac{1}{a z_m} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{a}{\gamma_0 z_m} \right) - \frac{\epsilon_{nx}^2}{\beta_0^2 \gamma_0^2 a^3} = 0 \quad (7-4-1)$$

$$k_{z0}^2 z_m - \frac{N r_c}{\beta_0^2 \gamma_0^4} \frac{1}{a z_m} - \frac{\epsilon_{nz}^2}{\beta_0^2 \gamma_0^6 z_m^3} = 0 \quad (7-4-2)$$

ここで

$$r_c = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \quad (7-4-3)$$

$$k_{x0} = \frac{\sigma_{x0}}{2\beta_0 \lambda} \quad (7-4-4)$$

$$k_{z0} = \left(-\frac{2\pi q E_m \sin \phi_0}{\lambda mc^2 \beta_0^3 \gamma_0^3} \right)^{1/2} \quad (7-4-5)$$

$$\epsilon_{nx} = \beta_0 \gamma_0 \epsilon_x = \beta_0 \gamma_0 k_x a^2 \quad (7-4-6)$$

$$\epsilon_{nz} = \beta_0 \gamma_0^3 \epsilon_{zz} = \beta_0 \gamma_0^3 k_z z_m^2 \quad (7-4-7)$$

である。ここで、 $E_m = E_0 T$ 、 N はバンチ内の粒子数を表す。上の関係から、ある収束力（縦 k_{z0} と横 k_{x0} ）を与えれば、それに対応して、ビームの縦と横のサ

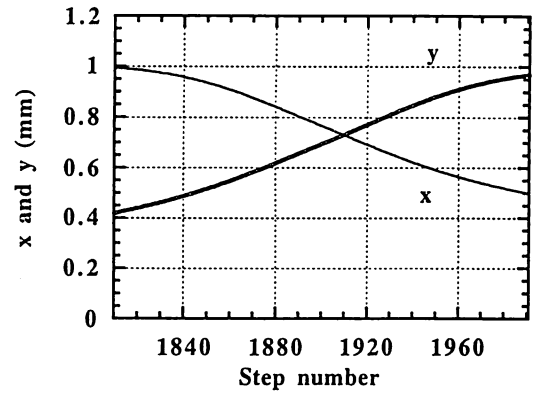


図 7-5 図 7-4 に示された粒子の横方向の位置の変化。

イズ (z_m 、 a) 及びビーム電流の効果を含む総合的な収束力 (k_z 、 k_x) が、与えられた入射ビームの条件のもとで、逐次加速過程において決められる事がわかる。入射時点においても、equipartitioning が成立するようなパラメーターを選ぶ。即ち、次式が成立するようにエミッタンスと収束力を選ぶ。

$$\frac{\epsilon_{nx}}{\epsilon_{nz}} \frac{k_x}{k_z} = 1 \quad (7-4-8)$$

加速過程においても、この関係が成り立つように選ぶ事は可能である。コード LINSAC は、加速過程で発生するエミッタンス増加を仮定して、加速過程のパラメーターの設定が、行なえる機能を備えている。具体的には、加速電場を加速管内で一定に保つ場合には、横方向の位相進みを漸次弱めていく事になり、反面、ビーム半径は次第に増加する。入射時点での、空間電荷効果を含まない横方向の位相進みを 60° に設定した上で、DTL の加速過程全域で磁場勾配を一定に保った時 (A) と、equipartitioning が成り立つように位相進みを変えた時 (B) とのビーム体積の変化の様子を図 7-6 に示す。磁場勾配変化の様子を図 7-7 に示す。タイ

プ(B)のように変化させる事は新たな問題を生む事も予想される。例えば、この方法では、必然的にビームサイズが大きくなるので、ドリフトチューブのビーム孔半径をタイプ(A)に比べて一層大きく設定する必要がある。又、高エネルギーになれば、ゼロ電流の時の位相進みの設定が小さくなってしまふので、大電流の場合には、位相進みが小さくなり過ぎるなどが指摘出来る。きめ細かな設計をあわせれば、魅力的な設計方法と言える。

式(7-4-8)からわかるように、equipartitioningを保つという事は、縦横の規格化エミッタンスが保存する場合には、縦と横の収束力の比を一定に保つ事を意味する。ゼロ電流の場合に、加速電場(Tを含めて)を一定に保つと、式(7-4-5)より、縦方向の収束力は $\beta^{-3/2}$ に比例する。これに対して、横方向の収束力は、位相進みを一定に保つとすれば、式(7-4-4)より $1/\beta$ に比例するから、加速に従って、縦方向の力の比が弱まる事になる。縦横の収束力の比をどのように変化させるのが良いかは、そのリ

ニアックの実現出来る加速電場の大きさが条件になり、位相振動を介して加速管の構造とも関連するから、最終的には、精密なシミュレーションで決める事が求められる。

さて、ピーク電流が大きく変わる可能性が高い場合には、横方向の収束力が柔軟に変化出来る事が望ましい事が、結論される。なぜならば、縦方向の収束力を変化させる事は陽子リニアックでは殆ど不可能であり、大強度ビームになればなるほど、空間電荷効果を横方向の収束力に反映させるような微細なチューニングを行なう事が重要になるからである。LINSACによるシミュレーション結果のサンプルは§5-2を参照。

§ 7-5 衝突 (ビーム内衝突)

高周波の1周期を細かく分割し、且つ空間電荷効果を全粒子に対しての和(7-2-6)により計算するので、LINSACの計算は粒子のバンチ内衝突の効

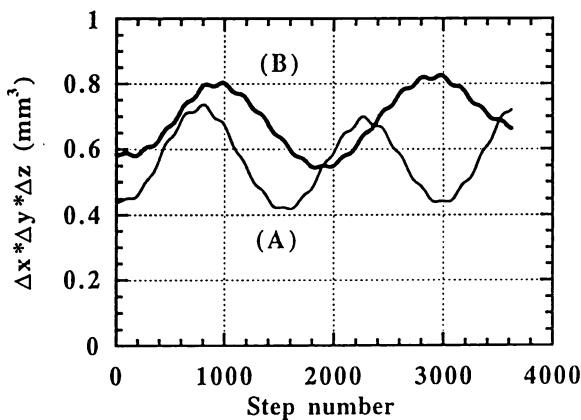


図7-6 加速過程におけるビーム体積の変化。
(A) 磁場勾配一定の時。
(B) equipartitioning が成立している時。

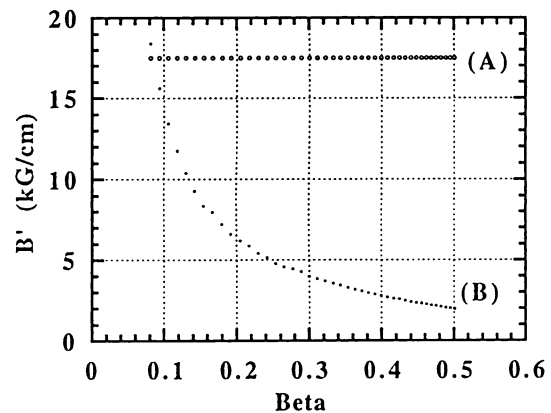


図7-7 加速過程における磁場勾配の変化。
(A) 磁場勾配一定の時。
(B) equipartitioning が成立している時。

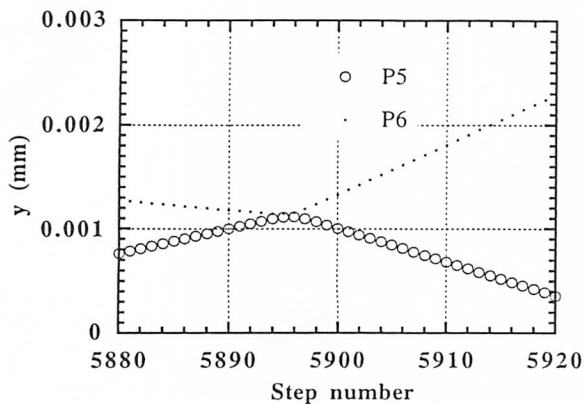


図7-8 衝突を起こした2個の粒子のy方向の軌跡。

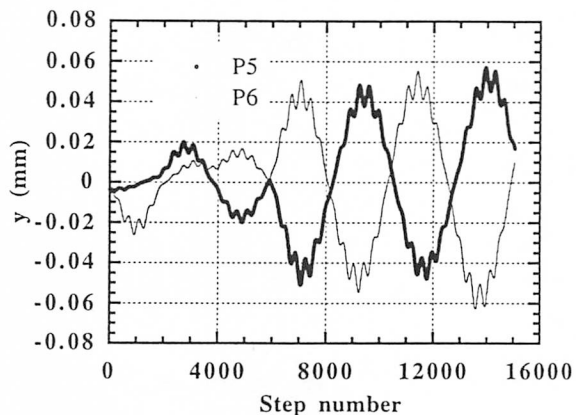


図7-9 図7-8に示した衝突粒子の入射から約80セル付近までのy-方向の軌跡。

果を含んでいる。図7-8に衝突付近の2個の粒子の軌跡を示す。図7-9には、図7-8の衝突を経た粒子の横方向の振幅が大きくなる様子を示す。図7-10には、3 MeV入射のバンチを148 MeVまで加速した後のビームのプロファイルを示す（計算に使用した粒子数は48000個。図7-8、7-9と図7

-10とは、入射ビームが全く違うので、スケールは比較できません）。中心に密度の高いコア部分があり、周りにハロー粒子（と呼んでいいとすれば）が散らばっている様子がわかる。こうした衝突の効果をどの程度に評価すべきであるかなどの問題点がある。

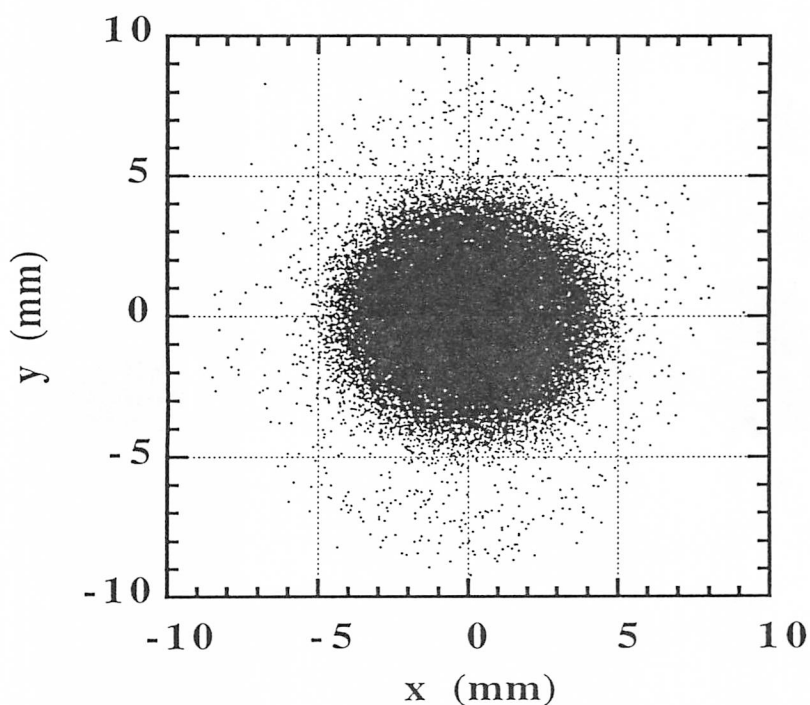


図7-10 3 MeV から148 MeVまで加速後のビームプロファイル。粒子数は48000。

おわりに

この仕事に最適な若い二人が、あるいは CERN に遊学中であり、あるいはこの夏の国際会議に向けて時間不足に追い込まれているという結果、締め切り近くに仕事をまわされてしまった。やむなく、昔、自分用に知識を集めた時に作成したノートを、一部分そのまま流用する事にした。これらは、参考文献にあげた論文を follow したものであり、筆者の考えはまれにコメントされているに過ぎないという点に注意しておかなくてはいけない。しかし、これら先人の論文は構成及び説明がきちんとなされており、むしろそのままを転載したほうが教育的と思われた。大強度陽子リニアックでは、エミッタンスの増加とそれにとまなう（ここの因果関係は断定出来ないが）ビームロスが主題と考え、エミッタンス関連の紹介を主題とした。その結果、他のいくつかの重要な問題には触れない事になった。第7章では、マシンの設計に迫られて書いたリニアック計算のコードを紹介した。存在が意識を決めるという言葉は古いかどうかはさておき、道具が意識を決めるという事はある程度正しいのではないかと知った。簡単なオーダー計算により現象を排除しないよう。そして、自分が使う計算コードをよく理解する事が必要です。あるコードを道具として使っていると、そのコードが書かれた時の近似又は無視を、結果的に忘れてしまう事が多々あるものです。特に章を設けてイオン源の原理的な式をあげたのは、立派なビームの初期状態を仮定するデザインが多い事による。理論の限界に迫るイオン源は、長時間の営業マシン運転に耐えられるかどうか問題と思う。high-intensity 負水素イオン源の場合、そうしたイオン源はまだ現実に存在しないと言われている。物理的（造形的）に不可能に近い空洞を仮定しているデザインも存在する。そうしたものは、一見とても魅力的だから、亡霊のごとくあらわれる。いったん作ったマシンの作り替えは容易ではないから、よく注意する事が肝要となる。思わぬ落とし穴に冷汗をかいた事を思い出す。これは自らへの戒めの言葉でもある。

基本的な事をまとめる機会をいただき、改めて色々な事に関連性が、わかってきました。関係の皆様にお礼申し上げます。

参考文献

- 1) T. Kato, "Proposal of a Separated-Type Proton Drift Tube Linac for a Medium-Energy Structure," KEK Report 92-10.
- 2) F. J. Sacherer, "RMS Envelope Equations with Space Charge," IEEE Trans. Nucl. Sci.18, 1105 (1971).
- 3) I. M. Kapchinskij and V. V. Vladimirkij, "Limitations of Proton Beam Current in a Strong Focusing Linear Accelerator Associated with the Beam Space Charge," Proc. Int. Conf. on High Energy Acc., p.274 (1959).
- 4) M. Reiser, "Theory and Design of Charged Particle Beams," John Willy & Sons, 1994.
- 5) K. Mittag, "On Parameter Optimization for a Linear Accelerator," KfK 2555 (1978).
- 6) T. P. Wangler, "Space-Charge Limits in Linear Accelerators," LA-8388 (1980).
- 7) I. Hofmann and J. Struckmeier, "Generalized Three-Dimensional Equations for the Emittance and Field Energy of High-Current Beams in Periodic Focusing Structures," Part. Accel.,21, 69 (1987).
- 8) 加藤隆夫, "ライナックとその周辺," OHO '84 (1984).
- 9) M. Reiser and N. Brown, "Thermal Distribution of Relativistic Particle Beams with Space Charge," Phys. Rev. Letters, 71, 2911 (1993).
- 10) T. P. Wangler et al., "Relation Between Field Energy and RMS Emittance in Intense Particle Beams," IEEE Trans. Nucl. Sci. 32, 2196 (1985).
- 11) T. P. Wangler, K. R. Crandall and R. S. Mills, "Emittance Growth from Charge Density Changes in High-Current Beams," AIP Conf. Proc. 152, 166 (1986).
- 12) T. P. Wangler, F. W. Guy and I. Hofmann, "The Influence of Equipartitioning on the Emittance of Intense Charged-Particle Beams," Proc. 1986 Linear Accelerator Conf., p. 340 (1986).
- 13) M. Kihara, "Outline of the Japanese Hadron Facility," Proc. International Workshop on Hadron Facility Technology, 1987, Los Alamos, LA-11130-C p.67; KEK Preprint 86-106. Y. Yamazaki et al., "The 1 GeV Proton Linac for the Japanese Hadron Facility," Proc. Advanced Hadron Facility Accelerator Design Workshop, 1988, Los Alamos, LA-11432-C p. 80; KEK Preprint 87-159. 大型ハドロン計画陽子リニアックワーキンググループ報告 I、JHP-10、KEK Internal 88-8 (1988), 大型ハドロン計画陽子リニアックワーキンググループ報告 II、JHP-14、KEK Internal 90-16 (1990).
- 14) I. Yamane et al., "PRIME - A Synchrotron of a Phased Program for JHP," KEK Report 93-12 (1993).
- 15) T. Kageyama et al., "Development of Annular Coupled Structure," Proc. 1994 International Linac Conf., p. 248 (1994).

一貫して参考にしたのは、Reiser による参考文献 4 であって、その提案する equipartitioning を実現した加速過程を code LINSAC に取り込む事により、シミュレーション結果が一層鮮明になった。

他に陽子リニアックのテキストに OHO '89 陽子リニアック (高崎栄一) があり、具体例が豊富である。