

ビードによる空洞内の電磁場の測定

空洞の境界面を僅かに移動した時の共振周波数の変化は次式で与えられる。

$$\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2} = \int (H_a^2 - E_a^2) dV \quad (1)$$

ω は摂動後の周波数、 ω_0 は摂動前の周波数、 H_a と E_a は摂動前の電磁場であり、 H_a^2 と E_a^2 の空洞体積内の積分は 1 に規格化している。(1) の積分は変化した体積内で行なう。上式が空洞内の微小な摂動体にも適用出来ると考える。その場合には、局所的な電磁場の大きさと摂動体の形状とにより摂動の大きさが変わってくる。例えば、円盤の平面を電場に垂直に置けば、電気力線が面に垂直になって、殆どもとの電場を乱さないと考えられる。しかし、平面を電場に平行に置けば、大きな摂動を与えるであろう。同じ体積でも置き方によって摂動の量が変わるわけである。但し、電磁場の相対的な変化を調べる場合には普通は(よほど間違った測定をしない限り)、測定結果は形状に依存しなくなる事は、実用上大切である。

摂動体が簡単な回転体の場合を考えてみる。

仮定：回転体の寸法は波長に比べて無視できる程度に小さいと考える。その場合には、充分な精度で電場を静電場で近似可能であり、それは解析的に解ける。

z 方向の一様な電場 E_0 の中に、半径 a の導体球がある時の静電ポテンシャルは、第 II 章の例題 4 に与えられており、

$$\phi = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta \quad (2)$$

電場の各成分は微分すればもとまり、

$$E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = E_0 \left(1 + \frac{2a^3}{r^3} \right) \cos \theta \quad (3)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = E_0 \left(-1 + \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \theta \quad (4)$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = 0 \quad (5)$$

$H_a=0$ としているので (1) は

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = \int_{\Delta v} E_a^2 dV \quad (6)$$

ここで $E_a^2 = E_r^2 + E_\theta^2 + E_\varphi^2$ (7)

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (8)$$

(6) の積分は、半径 a から $a + da$ までの無限小の変化をまず考えて、それから $a=0$ から a までの積分を行なう。従って (6) の右辺は

$$\int_a^{a+da} \left(1 + \frac{2a^3}{r^3}\right)^2 r^2 dr \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta + \int_a^{a+da} \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)^2 r^2 dr \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \quad (9)$$

この積分を行なう為に次の関係を使う。

$$\int_{x_0}^{x_0+dx_0} f(x) dx = f(x_0) dx_0 \quad (9)$$

$$\int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{2}{3} \quad (10)$$

故に $\int_V^{V+dV} E_a^2 dV = 12\pi E_0^2 a_0^2 da_0 \quad (11)$

(11) を $a_0=0$ から a まで積分すれば求める関係が得られる。

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = 3E_0^2 \frac{4\pi}{3} a^3 \quad (12)$$

同様にして磁場だけが存在する場合には

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = -\frac{3}{2} H_0^2 \frac{4\pi}{3} a^3 \quad (13)$$

が得られ、(12)(13)をまとめると

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = \frac{4\pi}{3} a^3 \left(E_0^2 - \frac{1}{2} H_0^2 \right) \quad (14)$$

摂動体が針の場合、円盤の場合などは L. C. Maier and J. C. Slater, J. Appl. Phys., 23(1952)68. に詳しいので参照してもよいし、ここでは Ginzton "Microwave Measurements" p.449 以降から引用する。

針状の回転楕円体、 $\beta = r_1/r_2$ 、 r_1 は短軸、 r_2 は長軸、長さを $2a$ とする。

針が電場と平行の時

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = \frac{E_0^2 (1 - \beta^2)^{3/2} V}{\frac{1}{2} \text{Ln} \frac{1 + (1 - \beta^2)^{1/2}}{1 - (1 - \beta^2)^{1/2}} - (1 - \beta^2)^{1/2}} \quad (15)$$

$$\text{ここで } V = \frac{4\pi a^3}{3}.$$

針が電場と垂直の時

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = \frac{2E_0^2(1-\beta^2)^{3/2}V}{\frac{(1-\beta^2)^{1/2}}{\beta^2} - \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{1+(1-\beta^2)^{1/2}}{1-(1-\beta^2)^{1/2}}} \quad (16)$$

針が磁場と平行の時

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = -\frac{H_0^2(1-\beta^2)^{3/2}V}{\frac{(1-\beta^2)^{1/2}}{\beta^2} - \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{1+(1-\beta^2)^{1/2}}{1-(1-\beta^2)^{1/2}}} \quad (17)$$

針が磁場と垂直の時

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = -\frac{2H_0^2(1-\beta^2)^{3/2}V}{\frac{(1-2\beta^2)}{\beta^2}(1-\beta^2)^{1/2} + \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{1+(1-\beta^2)^{1/2}}{1-(1-\beta^2)^{1/2}}} \quad (18)$$

次に 2a が円盤の直径に相当する場合を考える。

円盤が電場と平行の時

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = \frac{2E_0^2(1-\beta^2)^{3/2}V}{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{\beta}{(1-\beta^2)^{1/2}} - \beta(1-\beta^2)^{1/2}} \quad (19)$$

円盤が電場と垂直の時

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = \frac{E_0^2(1-\beta^2)^{3/2}V}{\frac{(1-\beta^2)^{1/2}}{\beta} + \tan^{-1} \frac{\beta}{(1-\beta^2)^{1/2}} - \frac{\pi}{2}} \quad (20)$$

円盤が磁場と平行の時

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = -\frac{H_0^2(1-\beta^2)^{3/2}V}{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{\beta}{(1-\beta^2)^{1/2}} - \beta(1-\beta^2)^{1/2}} \quad (21)$$

円盤が磁場と垂直の時

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = - \frac{2H_0^2(1-\beta^2)^{3/2} V}{\tan^{-1} \frac{\beta}{(1-\beta^2)^{1/2}} + \frac{2-\beta^2}{\beta}(1-\beta^2)^{1/2} - \frac{\pi}{2}} \quad (22)$$

特に針の場合には、感度の方向依存性を利用して、電場の方向等が測定出来る可能性がある事が Ginzton に論じられているので、そのような精密測定をする場合には参照の事。

(1) は空洞内で規格化されており、物質の定数が入っていない等の問題点があるので、実用上では、次式に書き直しておいたほうが都合が良い。

$$\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2} = k \frac{\int_{\Delta\tau} (\mu H^2 - \epsilon E^2) d\tau}{\int (\mu H^2 + \epsilon E^2) dV} \quad (23)$$

分子の積分は摂動体で行ない、分母の積分は空洞全体で行なう。k は摂動体の形状に依存する係数である。

(1) の分母は 1 に規格化されていた。分母は空洞の蓄積エネルギー U の 2 倍であるから

$$\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2} = k \frac{\int_{\Delta\tau} (\mu H^2 - \epsilon E^2) d\tau}{2U} \quad (24)$$

摂動が小さい時には

$$\delta = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = k \frac{\int_{\Delta\tau} (\mu H^2 - \epsilon E^2) d\tau}{4U} \quad (25)$$

シャントインピーダンスの測定

$$\text{無負荷 } Q \text{ は } Q_0 = \omega \frac{\text{energy stored}}{\text{energy lost per second}} = \frac{\omega U}{P} \quad (26)$$

シャントインピーダンスの定義は

$$R_0 = \frac{(\text{effective voltage})^2}{\text{power loss}} = \frac{(\int E dz)^2}{P} \quad (27)$$

ここで注意すべきは、分母が 2P となっている場合がある事であり、これは定義の違いと考えてよい。ドリフトチューブリニアックは、距離 L を進む時の加速エネルギーを $E_0 TL \cos\varphi$ で表しており、この E_0 が (27) の積分に相当して、平均加速電場と呼ぶ。そして、高周波電場を $E_0 \cos\omega t$ と表す。従って、

$$(\int E dz)^2 = E_0^2 L^2 \quad (28)$$

(27)(28) より、よく使われる単位長さ当たりのシャントインピーダンス Z を求めると

$$Z(\Omega / m) = \frac{R_0}{L} = \frac{E_0^2 L}{P} = \frac{E_0^2}{P/L} \quad (29)$$

となって、加速電場と単位長さ当たりの高周波損失との比になる。(26)(27)より

$$\frac{R_0}{Q_0} = \frac{(\int Edz)^2}{\omega U} \quad (30)$$

式の形からわかるように、R/Qは空洞の損失によらないという特徴があり、これは空洞の重要な性能指標の一つとなる量である。

電場が一定の場合には

$$(\int Edz)^2 = E^2 L^2 \quad (31)$$

このEは数値的には平均電場と同じであるが意味は違っている。従って、(30)は

$$\frac{R_0}{Q_0} = \frac{L^2 E^2}{\omega U} \quad (32)$$

加速管は普通 TM01 モードで働く為に、軸上の磁場はゼロであり、電場だけが存在するとみなす事ができる。摂動が小さく、且つEが一定の時には、 $\Delta\tau$ を摂動体の体積とすれば、(25)は

$$\delta = -\frac{k\epsilon E^2 \Delta\tau}{4U} \quad (33)$$

故に、(32)の E^2/U は測定により得られる事がわかる。(32)(33)より

$$\frac{R_0}{Q_0} = -\frac{4L^2}{k\omega\epsilon f} \frac{\Delta f}{\Delta\tau} = \frac{240}{k} L^2 \frac{\Delta\lambda}{\Delta\tau} = \frac{72 \times 10^9}{k} \frac{L^2}{f^2} \frac{\Delta f}{\Delta\tau} \quad (34)$$

形状因子kの求め方

- 1) 導体球などの簡単な場合は計算でもとまる。(14)式参照。
- 2) 理論計算でR/Qが算出出来るものと比較する。例えばTM010モード。
- 3) 形状因子が1と見做せるような実験をする。

(3)について紹介しよう。

電場が軸に沿って一定と見做せるときのR/Qの測定

周波数チューニングバーを、空洞の壁から出し入れして周波数変化を測定する。バーが壁面と一致する時には、空洞内の電磁場は乱されていないはずである。従って、この時は $k=1$ である。摂動体の体積に対して周波数変化をプロットして、体積ゼロの所の傾きを求めればよい。これは、摂動体積を無限小に外挿する事になる。図に具体例を示す(Ginzton p.442)。

電場が軸に沿って変化する時のR/Qの測定

この場合が一般的である。軸方向の空洞の中心位置の平面上では、普通電場が最大(E_m)であり、且つ対称になっている。一般には、中心位置でなくとも、電場が対称となる位置でよい。この面に前項のチューニングバーを設置して絶対測定を行なうと、

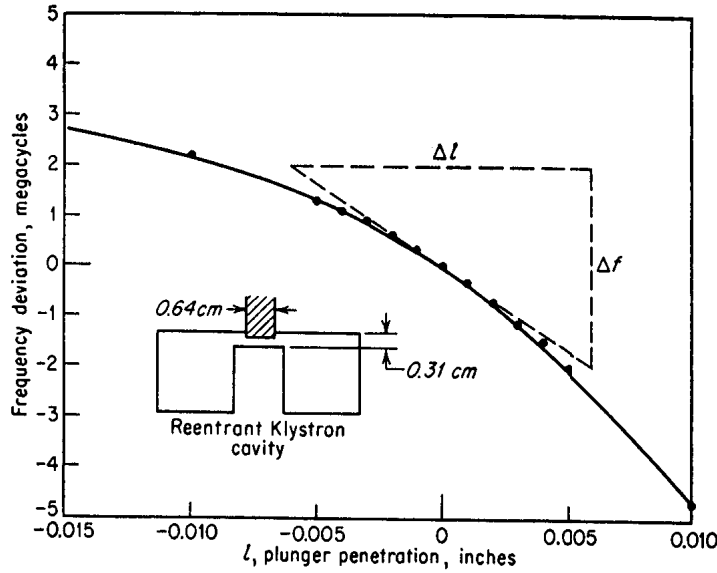


FIG. 10.4. Typical experimental perturbation data obtained with a klystron resonator at 2,800 Mc.

$$\delta = -\frac{\epsilon E_m^2 \Delta \tau}{4U} \quad (35)$$

が測定される。次に軸に沿って電場分布の相対測定を、微小なビードを用いて行なう。この相対測定からわかるのは、 E_m と平均電場 E_0 との比である。

$$\alpha = \frac{E_m}{E_0} \quad (36)$$

(30)の積分は $E_0 L$ になる事に注意して書き直すと、

$$\frac{R_0}{Q_0} = \frac{E_0^2 L^2}{\omega U} = \frac{E_m^2 L^2}{\alpha^2 \omega U} = -\frac{2}{\pi \alpha^2 \epsilon} \frac{L^2 \Delta f}{f^2 \Delta \tau} \quad (37)$$

なお、ビードの体積、誘電率等が正確に測定できれば、ビードを動かす事により絶対測定が出来る事は明らかであるが、ビードは小さいので精度には注意を要する。

進行波の場合の注意

加速に進行波を用いる時は（電子リニアックでは一般的である）、測定は普通定在波で行なわざるを得ないので、新たに注意が必要である。第一に必要なシャントインピーダンスの定義が違って来る事に注意する必要がある。電子は位相速度が電子の速度と等しい電場成分（空間高調波の基本波 E_f ）のほぼピーク値と共に加速されるので

$$\frac{R_0}{Q_0} = \frac{\left(\int E_f dz\right)^2}{\omega U} = \frac{E_f^2 L^2}{\omega U} \quad (38)$$

と定義するのが簡明であろう。第二に注意すべきは、絶対測定を（35）の方式で行なう時に、（35）の測定で得られる E_m と E_f の関係を明らかにする事である。2/3 π モード加速の場合などには、この関係を見いだすためのビード測定をしなければいけない。第三に注意すべきは、測定の際の stored energy U は、進行波だけの場合の2倍になっている事である。

周波数測定 of 注意

空洞内部を誘電率と透磁率の異なる物質で満たすと、波長の変化が起こり、共振周波数の変化となる。
(27.2) より媒質の定数を ϵ_r, μ_r とすれば、電磁場の速度は

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}}$$

従って
$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}}$$

λ_0 は真空中の速度である。空洞共振器では、空洞のサイズと波長は正比例の関係なので、

$$\frac{f(\epsilon_r)}{f(\epsilon_0)} = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}}$$

従って、真空中に比べ、大気中では空気の誘電率が僅かに大きくなるので、共振周波数は低下する。この周波数変化は、空洞の一般論の例 2 で求めた誘電損失による共振周波数の変化とは区別されるものである。

空気の誘電率は (Montgomery p.391)

$$\epsilon_r = 1 + 210 \times 10^{-6} \frac{P_{\text{air}}}{T} + 180 \times 10^{-6} \left(1 + \frac{5580}{T} \right) \frac{P_w}{T}$$

P_{air} : 空気の圧力 (分圧) [mmHg, Torr]

P_w : 水蒸気分圧 [mmHg, Torr]

T : 絶対温度

湿度 H と水の飽和水蒸気圧 E_w との関係は

$$H(\%) = 100 \times \frac{P_w}{E_w}$$

温度 25 °C では $E_w = 3168.3 \text{ Pa}$ (パスカル) = 23.76 Torr だから、湿度 50% とすれば $P_w = 11.88 \text{ Torr}$ となる。(理科年表の物理 / 化学の章: 水の蒸気圧、1 Torr = 133.32 Pa) 従って、温度 25 °C (298K) 1 気圧 (760 Torr) の空気では

$$\epsilon_r = 1.000536 \quad (\text{湿度 } 0\%)$$

$$\epsilon_r = 1.0005356 + 0.0001415 = 1.000677 \quad (\text{湿度 } 50\%)$$

となる。これから、周波数変化として

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta \epsilon_r}{\epsilon_r}$$

と近似出来る事を考慮すれば、夫々 0.027% と 0.038% の周波数変化を与える事がわかる。